Fachwissenschaftliche Grenzen und stoffdidaktische Probleme der elementaren Stereometrie

von Lutz Führer, Frankfurt am Main

(GDM-Jahrestagung in Ludwigsburg, Dienstag, 6. März 2001, 17.00 Uhr)

Raumgeometrie hat wieder Konjunktur. Virtuelle Welten haben längst Kino und Werbung erobert, 3D-Grafikprogramme mit Rendering- und Raytracing-Funktionen gibt es inzwischen bei Aldi für 30,- DM, Herr Schumann hat sein Schnitte-Programm sehr weit entwickelt, der Zugmodus hat auch die Raumgeometrieprogramme erreicht. Es wird auch wieder gebastelt. Frau Franke und die Herren Kroll und Wollring bemühen sich um Raumgeometrie für die Primarstufe, die Herren Ludwig und Maier entwickeln handwerkliche Projekte. Herr Müller läßt die Darstellende Geometrie gerade wieder zu Ehren kommen, Frau Reiss analysiert raumgeometrische Fertigkeiten mit Intelligenztestitems auf dem Computer. Binet, Thurstone und Guilford werden wieder zitiert, und es ist nur noch eine Frage der Zeit, bis jemand – hinter Treutlein, der Meraner Reform und den preußischen Rahmenrichtlinien von 1900 verborgen – die raumgeometrische Leitidee bei Fröbel oder Harnisch entdecken wird.

Das traditionell gewachsene Gymnasialcurriculum – und in seiner akademischen Nachfolge teilweise auch das Real- und sogar das Hauptschulcurriculum – betrieb ab Klasse 9 über weite Strecken des 20. Jhs. eine propädeutische Grenzwertrechnung an besonders sinnfälligen Beispielen: Quadratwurzeln, quadratische Gleichungen und Ähnlichkeitsbetrachtungen in Klasse 9, Trigonometrie, Wachstum, Logarithmen, Kreisberechnung und nichttriviale Stereometrie in Klasse 10. Im Sinne einer Propädeutik der theoretischen Analysis wurde als theoretisches Standardmittel die Intervallschachtelung herausgestellt, deren automatische Fehlerkontrolle sich erst- und letztmals beim unbekannten Grenzwert π bewährte, vielleicht noch bei der Pyramidenapproximation durch Innen- und Außentreppen. Numerische und Definitionsprobleme wurden in der Regel nicht erörtert. Letzteres ließ z.B. die Paradoxie der Rechtecksnäherung für den Kreisumfang ungeklärt. In diesen Rahmen hätte die Fläche des Parabelsegments mittels geometrischer Reihe nach Archimedes sehr gut gepaßt, aber das wurde nur ausnahmsweise versucht – vielleicht, weil man sich alle elementaren Reihenmethoden für die Integralrechnung des 12. Schuljahrs aufsparen wollte. Zumindest für die geometrische Reihe empfand mancher das wohl gelegentlich als Unterlassungssünde, und so tauchte sie dann in einigen der berüchtigten Brückenkurse am Beginn des 11. Schuljahrs vorübergehend, recht unvermittelt und folgenlos auf. Nicht einmal für die elementaren Flächenintegrationen ist man Fermats Vorbild geeigneter Intervallteilungen gefolgt, vermutlich weil man das verdünnte Riemann-Darboux-Integral mit (numerisch geistlosen) äquidistanten Intervallteilungen fest im Blick hatte.

Die Fixierung auf rein-mathematische Begriffsbildungen verhinderte auf diesem Wege neben vernünftig naheliegenden approximativen Zugängen und numerischen Erfahrungen auch jedes substanzielle Verständnis der eigentlich angestrebten Begriffsbildungen in der Integralrechnung. Heute sind zwar die früheren Schwierigkeiten mit dem numerischen Aufwand entfallen, dafür werden leider neue Schwierigkeiten erzeugt durch allerlei gedankenloses Gerede um die Jauch-Frage, wieviel Termumformungen der Mensch brauche, um Millionär zu werden. Die Numerik ist zweifellos viel leichter geworden als zu meiner Studienzeit, dafür hapert es zunehmend mit der Buchstabenrechnung. Unter diesen Auspizien lohnt es sich, noch einmal über die mathematische Substanz am oberen Rand der (endlichen) Elementarmathematik nachzudenken, auch um evtl. zeitgemäßere Zugänge zur Oberstufenmathematik zu gewinnen.

1. Historischer Überblick

„babylonisch“: Gräben, Schächte, Wälle ... näherungsweise mithilfe massiver Mittelwertbildungen

ägyptisch: ebenso; Papyrus Moskau: 1 exakten Pyramidenstumpf vorgerechnet (Begründung unbekannt)

Demokrit: Kegel, Pyramide ... „anschaulich“ (Archimedes); Atomlinien?

Eudoxos: Kegel, Pyramide ... „bewiesen“ (Archimedes)

Archimedes: Paraboloid, Kugel (Waage; Exhaustion und Kompression)

Archimedes/Pappos: Rotationskörper, Guldinsche Regeln

Heron: elementare „Wortformeln“, Obersummen für Körper

Kepler 1615/16: Rotationskörper (nach Archimedes’ Kreisabwicklung ausgestreckt)

Cavalieri, Guldin, Torricelli

Faßregel (Torricelli, Gregory, Newton, Leibniz, Stirling, Cotes, Simpson...)

Cauchy 1813: konvexe Polyeder sind – bei starren Seitenflächen – starr

Cauchy 1823: Zwischensummen

W. Bolyai 1832, P. Gerwien 1833

Riemann 1854: Zwischensummen

Volterra, Darboux: Ober- und Untersummen

Cantor 1884: Cantor-Mengen (fehlende Inhaltsdefinition; für die Ebene: Sierpinski-Teppich; Raum: Menger-Schwamm)

Peano 1887, Jordan 1892: Innerer = äußerer Inhalt dund., wenn Rand Nullmenge ist

Hilbert (3. Problem), Dehn 1900, Sydler 1965: im Raum Zerlegungsgleichheit ≠ Ergänzungsgleichheit

Bricard 1900: Es gibt flexible (nichtkonvexe) Polyeder (Existenzsatz)

Borel, Lebesgue 1902, Young und Vitali 1905: σ-Additivität nicht universell gültig (Konvergenzbeweise???)

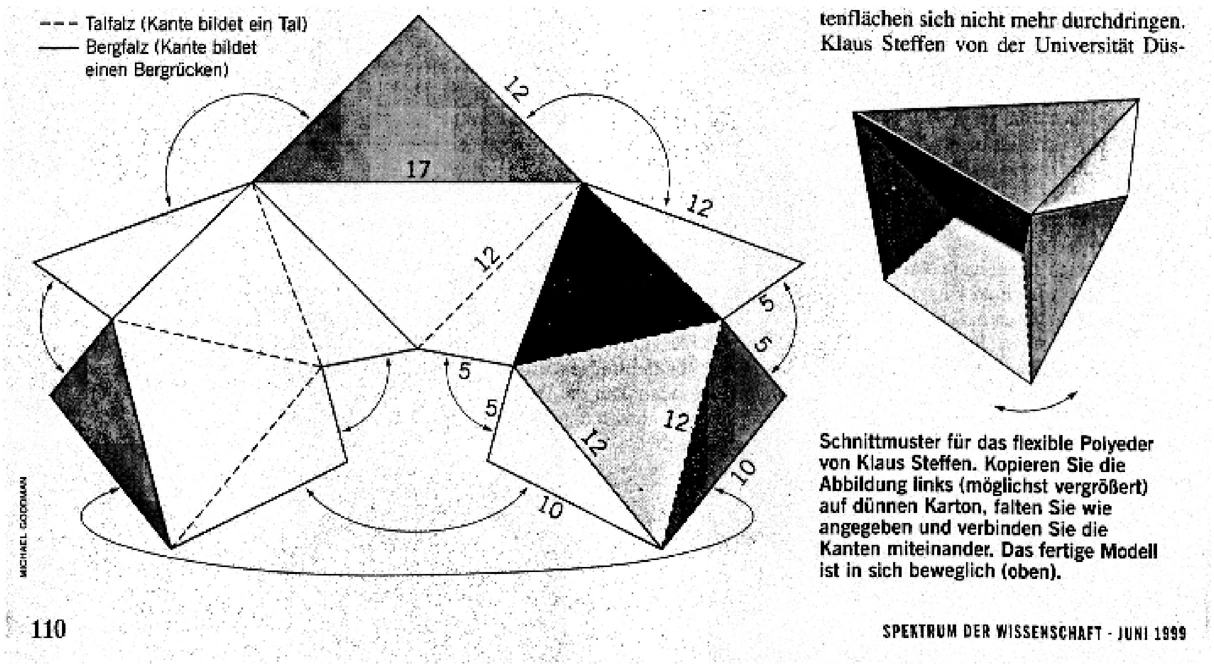
Hausdorff 1914: Additivität im Raum nicht einmal für beschränkte Mengen universell möglich

Banach 1923: in der Ebene schon

Banach, Tarski 1924: Alle beschränkten Mengen mit inneren Punkten sind im $\mathbb{R}^3$ kongruent

Tarski 1925: Verallg. Bolyai-Gerwien: Polygone sind incl. Randpunkten dund. mengentheoretisch zerlegungsgleich, wenn sie flächengleich sind. Ist der Kreis quadrierbar?

Conelly um 1975: flexibles Polyeder realisiert (Vereinfachung von Steffen)



Laczkovich 1990: Kreis mengentheoretisch quadrierbar – sogar allein mittels Translationen

Conelly, Sabitov, Walz 1997: flexible Polyeder haben invariantes Volumen („Blasebalg-Vermutung")

Ob Polyeder und Kugeln translations-zerlegungsgleich sind, ist bzw. war (jedenfalls bis 1990) offen (s. Klee/Wagon)

2. Volumen des Pyramidenstumpfs?

Wiegen → Ohne Pyramidenvolumen mittels Hebelgesetz (Gleichgewicht zum Keil: Archimedes; s.a. Winter; Cavalieri-Prinzip!)

Wasserfüllungen → Aus dem bekannten Pyramidenvolumen mittels Ergänzungspyramide (Streckungsargument; Strahlensatz!)

Ummantelungen → nach Heron ummantele man eine Statue mit Lehm bis ein Quader entsteht, dann entferne man den Überstand und wiege oder tauche ihn → Ergänzungsgleichheit

Wülste abschneiden und umstopfen...→ Babylonischer Schiefkörper und Kegelstumpf: Mittelwerttechniken

Quadernäherung auszählen (Cheops-Pyramide) → Pyramidenvolumen mit äquidistanter Innen- und Außentreppe. Teleskopsumme für den Fehler = untere Stufe (s.z.B. Höfler 1910)

Würfelschnitte → Papyrus Moskau Sechs Pyramiden(stümpfe) im Würfel (Sepzialfälle; allgemein: Streckungsargument) → Zerlegungsgleichheit

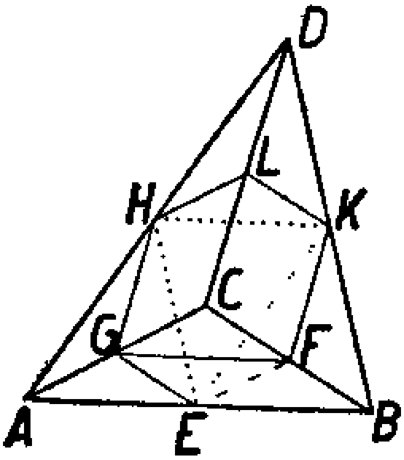
Prismenschnitte → Euklids Zerlegungsgleichheit in XII.3 (→ Scherungen; Cavalieri-Prinzip) → Zerlegungsgleichheit

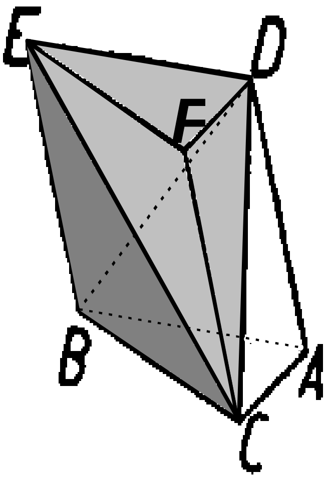
XII. Buch des Euklid

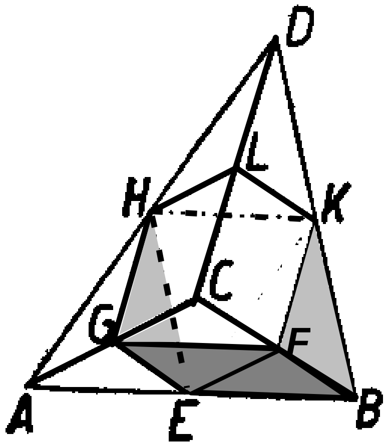
XII.3:
Jede Pyramide mit dreieckiger Grundfläche (Tetraeder) läßt sich zerlegen in zwei (raum-)gleiche, einander und der ganzen ähnliche Pyramiden mit dreieckigen Grundflächen sowie zwei gleiche Prismen, und die beiden Prismen sind zusammen größer als die Hälfte der ganzen Pyramide.

XII.5(6):
Tetraeder (Pyramiden) unter derselben Höhe verhalten sich zueinander wie die Grundflächen.

XII.7:
Jedes Dreiecksprisma läßt sich in drei einander gleiche Tetraeder zerlegen.







Methoden zur Inhaltsbestimmung für konkrete Objekte

empirische Methoden bzw. Heuristik	*Autoren*
Zerschneiden und Umstopfen	babylonische Mittelwerttechniken (? Gericke), Heron (Ergänzungsgleichheit)
Zerlegungsgleichheit	Papyrus Moskau (? v.d. Waerden), Euklid XII

Näherungstreppen	(Cheops-Pyramide), Demokrit (? Archimedes' Methodenschrift), Eudoxos (? ebenda), Archimedes (Exhaustion und Kompression)
Auswiegen	Archimedes
Wasserfüllungen/Wasserverdrängung	Archimedes, Heron
Zerlegung mit Verzerrung	Kepler 1615/16 (Keile für Rotationskörper)
Schichtenvergleich	Archimedes, Cavalieri, Torricelli
dicke Schichten und Mittelwerte	Torricelli, Gregory 1668, Newton-Cotes 1722, Stirling, Simpson 1743
Zwischensummen	Cauchy 1823, Riemann 1854
Ober- und Untersummen	Volterra, Darboux um 1890
Rauchfüllung	Conelly um 1975 („Blasebalg-Vermutung" für flexible Polyeder; bewiesen 1997)

3. „Keplersche" Faßregel

Die Raumgeometrie leidet unter der eklektischen Krankheit. Gibt es eine (halbwegs) universelle Formel für alle elementare Körperberechnungen? Wie steht es mit den Oberflächenbestimmungen?

Obwohl sich Kepler bekanntlich 1615/16 sehr ausführlich mit Faßberechnungen auseinander gesetzt hat, stammt die Faßregel nicht von ihm (vgl. Röding). Möglicherweise gehörte sie zur mathematischen Folklore unter den (wenigen) Spezialisten des 17. Jhs. (Gregory 1668 (Tropfke, S. 44); Leibniz; die Bernoullis; Stirling u.a.). Nach Baltzer stammt die Volumenregel gemäß einer Bemerkung von Perelli im Anhang von G. Grandis Kegelschnitten von 1744 ursprünglich von Torricelli. Die erste Veröffentlichung stehe in den nachgelassenen Werken Newtons über den Methodus differentialis (Hrsg. Cotes 1722; prop. 6) und sei dort vom Herausgeber weiter ausgeführt und später von Gauß verfeinert worden (Meth. nova integralium valores etc. 1814, Comm. Götting. t.3). Thomas Simpsons „Mathematical dissertations" von 1743 habe sich auf die Anwendung mit mehreren Teilschnitten bezogen, und dafür sei die Bezeichnung „Simpsonsche Regel" berechtigt.

Herleitung für $\int_a^b f \approx \int_a^b p = (b-a) \cdot \frac{f(a) + 4 \cdot f(m) + f(b)}{6}$: Näherung durch Parabelbogen für einseitig gekrümmtes positives f über $[a, b]$ plausibel. Berechnung der Parabelfläche mittels Randpunkt-Trapez + Parabelsegment, wobei Parabelsegment = 2/3 jedes umbeschriebenen Paralellogramms.

Idee von Poncelet (nach Fürich/Nimz)

Qualität: s.z.B. Kroll-Vaupel, Ledermann (besonders schön), Seeley sowie unter „Newton-Cotes-Formeln" in Numerik-Lehrbüchern

Faßregel „versagt" (nicht exakt) für Kugelausschnitt. Dort ist $V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$. (Klärung durch Integralrechnung)

Prismatoide: Faßregel plausibel machen

Herleitung des Prismatoidenvolumens nach Koppe-Diekmann: Geom. für Realanstalten, Band II. Baedeker 1920 (vgl. auch Weber/Wellstein):

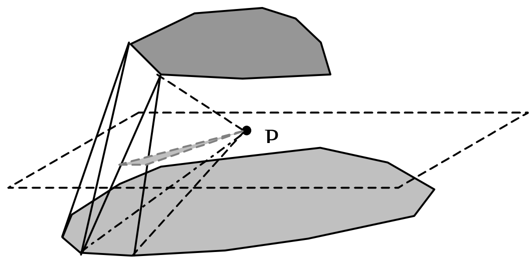
> Als Prismatoiden werden konvexe Polyeder bezeichnet, die ein Grund- und ein Deckpolygon in parallelen Ebenen haben und deren übrige Seiten Dreiecke sind, deren Ecken zum Grund- oder Deckpolygon gehören.
>
> Das Prismatoidenvolumen kann man aus dem Pyramidenvolumen wie folgt herleiten: Wählt man P im Innern des parallelen Mittelschnitts, so zerfallen die mit P gebildeten Tetraeder über den Seitendreiecken durch den Mittel-

schnitt jeweils in zwei Teilpyramiden, deren Volumina sich wie 1 : 3 verhalten. Die Trennwände bilden zusammen den Mittelschnitt, und der Prismatoid zerfällt in folgende Teile:

Prismatoid = Deckpyramide mit Spitze P + Grundpyramide mit Spitze P + 4·(Mittelschnitt·h/2):3

= h/6·(Deckfläche+Grundfläche+4·Mittelschnitt)

Koppe-Diekmann verrifizieren die Formel am Prisma, an der Pyramide und am Pyramidenstumpf und verwenden sie anschließend zu Näherungsberechnungen an Kugel, Kugelabschnitt, Kugelzone und Kegelstumpf. Anschließend werden „Simpsonsche Körper“ mit höchstens kubischer Querschnittsfunktion definiert und mit Hilfe des Satzes von Cavalieri ausgemessen. Es wird erwähnt, daß Torricelli die Regel für die Kurgel angegeben habe (Nachsatz zu Galileis Discorsi), daß sie von Newton, Newton-Cotes und Simpson als Näherungsformel empfohlen wurde und daß Keplers Doliometrie mit ihren abgestumpften Doppelkegeln nahe daran war (S. 72 u.). Abschließend werden damit Zylinderhufe, Kreuzgewölbe, Fässer und das Erdellipsoid berechnet (ab S. 84).



4. Infinitesimales: Streckungsargumente, Cavalieri-Prinzip und Satz von Dehn-Sydler

Stereometrie dient (auch) dem Eindringen ins Wesen anschaulicher Begriffe: reale versus ideale „Objekte“ (= beschränkte Mengen?).

Platon, Gesetze, Buch VII:

Hinsichtlich der Messungen von allem, was Länge, Breite und Tiefe hat, legen die Griechen eine in allen Menschen vorhandene, aber ebenso lächerliche wie schmähliche Unwissenheit an den Tag – nicht wie es Menschen, sondern wie es Schweinen geziemt, und ich schämte mich daher nicht bloß über mich selbst, sondern für alle Griechen.

Robertus Anglicus (1477):

Stereometrie ist, wenn wir ains Dings lenge, praite und tieffe suchen.

Lobatschewskij (1835):

Raum, Ausdehnung, Ort, Körper, Fläche, Linie, Punkt, Richtung, Winkel sind Wörter, mit denen man die Geometrie beginnt, mit denen man aber niemals einen klaren Begriff verbindet... Es ist nöthig zu bemerken, daß hier die Unklarheit im Begriffe durch die Abstraktheit hervorgerufen wird, die bei der Anwendung auf wirkliche Messungen überflüssig wird... Andrerseits gibt es in der Natur weder gerade noch krumme Linien, weder Ebenen noch krumme Flächen; wir finden darin nur Körper, so daß alles Übrige von unsrer Einbildungskraft geschaffen und daher blos in der Theorie vorhanden ist. („Neue Anfangsgründe der Geometrie“; zit.n. Dieudonné, S. 754f.; vgl. dazu auch Helmholtz-Zitat, S. 759, nach dem die Existenz und freie Beweglichkeit starrer Körper zu den „Thatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen“ gehören, sowie den Aufbau der Protogeometrie nach Hjelmslev, Dingler, Lorenzen u.a.)

Gauß an Gerling (8.4.1844):

Ihre Bemerkungen über Symmetrie und Congruenz sind vollkommen treffend. Was noch zu desideriren wäre, ist der metaphysische Grund, warum es so ist (was bei Ihnen als wahrgenommene Thatsache auftritt) und damit auch die Erweiterung auf eine Geometrie von mehr als 3 Dimensionen, wofür wir menschliche Wesen keine Anschauung haben, die aber in abstracto betrachtet nicht widersprechend ist, und füglich höheren Wesen zukommen könnte. Um aber, aus dieser Höhe, wieder auf die Erde herunterzukommen, so ist es schade, dass die Gleichheit der Volumina körperlicher bloss symmetrischer, aber nicht congruenter Gebilde, sich nur durch die Exhaustionsmethode, und nicht eben so elementarisch demonstriren lässt, wie meines Wissens zuerst Sie bei der Area des sphärischen Dreiecks gezeigt haben. (VIII, 242)

Frege (1893):

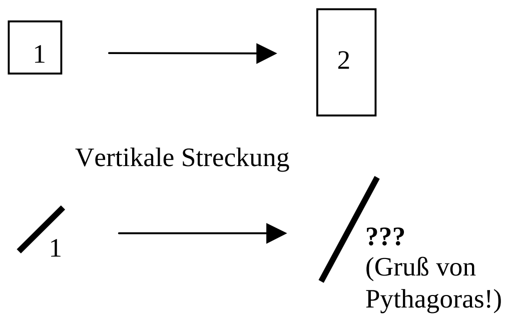
Was Grösse sei, ist wohl niemals befriedigend gesagt worden.

Der Grund dieser Misserfolge liegt in der falschen Fragestellung. Es giebt sehr verschiedenartige Grössenarten: Längen, Winkel-, Zeitgrössen, Massen, Temperaturen u.s.w., und es wird kaum möglich sein, anzugeben, wodurch die Angehörigen dieser Grössenarten sich von Gegenständen unterscheiden, die nicht einer Grössenart angehören. Auch wäre damit nicht viel gewonnen, denn es fehlte noch an jedem Mittel, zu erkennen, welche von diesen Grössen demselben Grössengebiet angehörten.

Statt zu fragen: welche Eigenschaften muss ein Gegenstand haben, um eine Grösse zu sein? Muss man fragen: wie beschaffen muss ein Begriff sein, damit sein Umfang ein Grössengebiet sei? Wir wollen nun statt „Begriffsumfang" der Kürze wegen „Klasse" sagen. Dann kann man die Frage auch so stellen: welche Eigenschaften muss eine Klasse haben, um ein Grössengebiet zu sein? Etwas ist eine Grösse nie für sich allein, sondern nur, sofern es mit anderen Gegenständen einer Klasse angehört, die ein Grössengebiet ist. (S. 157-159)

J.H.C. Duhamel:

Weil aber alle Betrachtungen über Äquivalenz (im Sinne von Zerlegungsgleichheit) dem Messen von Größen vorausgehen und sogar zum Ziel haben, zu letzterem hinzuführen, so kann man sich nicht von Anbeginn an auf die Möglichkeit dieses Maßes stützen. (Des méthodes dans les sciènces de raisonnement. 1865, S. 446; zit. n. Volkert, S. 17)



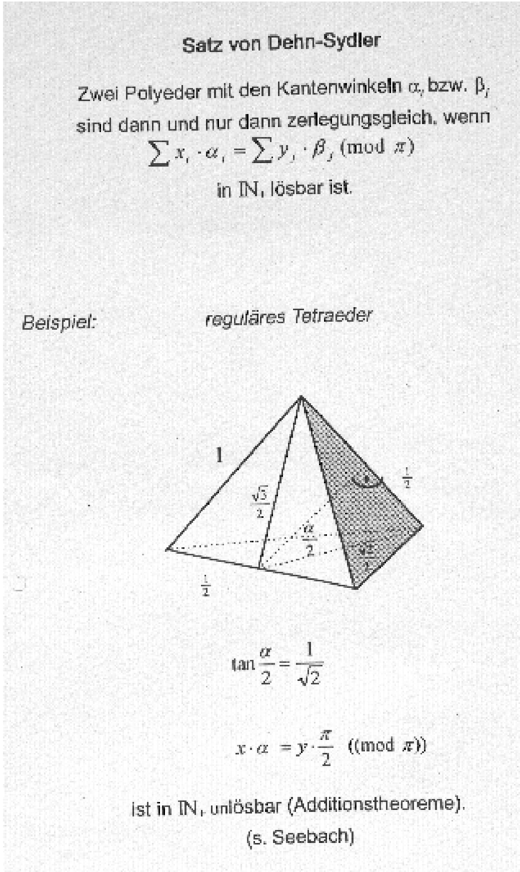
Approximierende Elemente:

Ellipsenbogen bei vertikaler Stauchung eines Viertelkreises.

Bei Euklid wird die Flächenvergleichslehre mit Zerlegungstechniken behandelt (s. Volkert).

Zerlegungsbeweise für den Satz von Pythagoras...

Alnairizi nach Tabit ibn Kurrah schafft es mit fünf Teilen des Hypothenusenquadrats (darunter zwei Vierecke), die beiden Kathetenquadrate zu legen (Tropfke, S. 143; dort auch Bezüge zum indischen und zum sog. Garfield-Beweis). Dasselbe wurde 1824 von Göpel wieder entdeckt. 1908 bewies H. Brandes in einer Hallenser Dissertation, daß mindestens 7 Dreiecke nötig sind.



Satz von Bolyai-Gerwien:

Flächengleiche Vielecke sind zerlegungsgleich (und auch ergänzungsgleich). (Hadwiger-Glur, 1951: Es reichen Parallelverschiebungen und Zentralsysmmetrien. Boltjanski, 1956: Das ist die minimale Bewegungsgruppe, die flächengleiche Vielecke zerlegungsgleich macht. Genau die zentralsysmmetrischen unter den konvexen Vielecken sind translationsquadrierbar.)

Beweisidee (nach Gerwiens Arbeit für sphärische Dreiecke – Gerwiens Arbeit für ebene Polygone argumentiert anders; s. Volkert, Boltjanski):

0. Zerlegungsgleichheit ist transitiv. (Gemeinsame Verfeinerung.)

1. Jedes Dreieck ist mit einem Rechteck zerlegungsgleich. (Man stelle das Dreieck auf die längste Seite. Die Mittellinie und die Grundseitenhöhe leisten das Gewünschte.)

2. Flächengleiche Parallelelogramme mit gleicher Grundseite sind zerlegungsgleich. (Boltjanski, S. 150)

3. Flächengleiche Rechtecke sind zerlegungsgleich. (Geschertes Rechteck ansetzen; ebenda)

4. Jedes Vieleck (auch mit einspringenden Ecken) ist zerlegungsgleich zu einem Rechteck.

Jeder elementare Aufbau des Volumenbegriffs für Polyeder aus dem Normkörper braucht (für Quader wie für Rechtecke) ein Stetigkeitsargument, aber zusätzlich noch ein weiteres für Tetraeder (vgl. Boltjanski).

Beweise zum Satz von Dehn s. Seebach und Boltjanski.

Beweismoral zum Satz von Dehn: Wer Ecken und Kanten hat, kann sein Äußeres nicht ungestraft ins Innere verlegen: er wird zwangsläufig irgendwo hohl.

Definition „des Rauminhalts"?

Jeder Rauminhaltsbegriff sollte sich auf eine „geeignet große" Klasse beschränkter Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ erstrecken und derartigen „Körpern" nichtnegative reele Zahlen normiert, (σ-) additiv und bewegungsinvariant zuordnen (n-a-b-Maß).

Integraldefinition (z.B. Ewald), Maßtheorie (Lebesgue), Banach-Tarski-Paradoxon (z.B. Kirsch). Das 3. Cantorsche Diagonalverfahren (von Vitali 1905; s. Cieselski) offenbart die Schwierigkeiten einer Definition mithilfe (σ-) zerlegungsgleicher Mengen (Quadratur des Kreises?). „Definition" ist hier Stilmittel zum Ausdruck einer Erkenntnis, *nicht* Beschreibung eines „realen"(?) Phänomens. Die Integralrechnung ist in dem Maße universell, wie sie approximativ verstanden wird. In exakter Form nützt sie der strukturierenden Orientierung und manchmal der rascheren Berechnung.

5. Curriculare Desiderate und offene stoffdidaktische Probleme

Die Themen Oberflächen und Raumwinkel werden heute schmählich vernachlässigt (vgl. Tropfke, S. 45). Die Keplersche Faßregel läßt sich (mittels Zylinderstumpfmänteln) mindestens auf Oberflächen von Rotationskörpern übertragen. Raumgeometrische Darstellungsprobleme lassen sich im PC-Zeitalter sehr vielseitig thematisieren (vgl. Giering).

Offene stoffdidaktische Probleme (Dissertationen?):

- Gesucht ist ein genetisch-plausibler Zugang zur Faßregel auf Mittelstufenniveau (vgl. Tropfke, S. 45; Henn)
- Gesucht ist eine elementare, genetisch-plausible und halbwegs universelle Methode zur Oberflächenbestimmung
- Wie können möglichst viele nichttriviale Körper zwecks Visualisierung einfach und bequem manipulierbar (Zugmodus) in den PC eingegeben werden? (vgl. Programme „Körpergeometrie“, „Simply3D“ sowie CAD)
- Wie könnte eine zeitgemäße, d.h. computer- und numerisch gestützte, Propädeutik der (welcher?) Schulanalysis aussehen?
- Was läßt sich über das Wechselspiel zwischen numerisch robusten Methoden und exakten Begriffsbildungen der elementaren Analysis historisch und didaktisch sagen?

6. Literatur

Alexandroff, P.S., u.a.: Enzykl. der Elementarmathematik, Band V. Berlin: VEB DVW 1971.

Archimedes: Werke (Übers. A. Czwalina). Darmstadt: Wiss. Buchges. 1972.

Baltzer, R.: Die Elemente der Mathematik. Leipzig: Hirzel (2. Aufl.:) 1867, Fußnote, S. 246, im Geometrieteil.-

Boltjanski, W.G.: Zerlegungsgleichheit von Vielecken und Vielflachen. In: Alexandroff u.a. 1971, S. 133-170.

Cieselski, K.: How Good is Lebesgue Measure?. In: Math. Intell., 11.2(1989), S. 54-58.

Dieudonné, J.: geschichte der Mathematik 1700-1900 – Ein Abriß. Braunschweig/Wiesbaden: Vieweg 1985.

Ewald

Folkerts, M.: Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit (Habil’vortrag, TUB 1.10.1973). In: Humanismus und Technik 18 (1974), S. 1-41.

Führer, L.: Objektstudien in der Vektorgeometrie. In: DdM...

Führich, A.; Nimz, H.: Die Keplersche Faßregel... In: MNU 50.5 (1997), S. 271-277.

Gericke, H.: Mathematik in Antike und Orient/Mathematik im Abendland. Wiesbaden: Fourier 1992.

Giering, O.: Visualisierung und klassische Geometrie. In: DMV-Mitteilungen 1/2001, S. 39-49.

Hammer, F.: Nachbericht zu Keplers Arbeiten über die Faßrechnung. In: J. Kepler: Ges. Werke, Band IX. München: C.H. Beck 1960.

Hausdorff, F.: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914 (Reprint New York: Chelsea 1949).

Henn, H.-W.: Volumenbestimmung bei einem Rundfaß. In: DdM 1 (1993), S. 17-32.

Kirsch, A.: Das Paradoxon von Hausdorff, Banach und Tarski... In: Math. Sember., 37.2 (1990), S. 216-239.

Klee, V.; Wagon, S.: Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory. MAA 1991 (The Dolciani Mathematical Expositions, Vpl. 11).

Kroll; Vaupel

Ledermann (Ed.): Handbook of Applicable Math., Vol. III: Numerical Methods.

Mackensen, L.v.: Neue Ergebnisse zur ägyptischen Zeitmessung. In: Alte Uhren 1 (1978), S. 13-18.

Röding, E.: Ein Zugang zur Behandlung der Keplerschen Faßregel. In: MNU 47.1 (1994), S. 13-20.

Seebach, K.: Didaktische Überlegungen zum Satz von Dehn. In: DdM 11(1983), S. 1-13.

Seeley, R.T.: Calculus

Simon, M.: Über die Entwicklung der Elementargeometrie im 19. Jh. Leipzig 1906.

Steen, L.A.: Unsolved Problems in Geometry. In: Math. Teacher 73 (1980), S. 366ff.

Stewart, I.: Flexible Polyeder und die Blasebalg-Vermutung. In: Spektrum der Wiss., Juni 1999, S. 110-111.

Tropfke, J.: Geschichte der Elementar-Mathematik, Band 7. Berlin/Leipzig: de Gruyter (2. Aufl.:) 1924.

van der Waerden, B.L.: Erwachende Wissenschaft. Basel/Stuttgart: Birkhäuser 1966.

Volkert, K.: Die Lehre vom Flächeninhalt ebener Polygone... In: Math. Sem'ber. 46 (1999), S. 1-28.

Walter, W.: Analysis II. Berlin u.a.: Springer 1990.

Warnecke, K.-G.: Keplersche Faßrechnung als Unterrichtsthema. In: PM 28.6 (1986), S. 321-324.

Weber, H.; Wellstein, J.: Encyklopädie der Elementarmathematik, Band 2. Leipzig (2. Aufl.:) 1907.

Wieleitner, H.: Keplers „Archimedische Stereometrie". In: Ünterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, 36 (1930), S. 176-185.