

LA CONJECTURE DES SOUFFLETS

[d'après I. Sabitov]

par Jean-Marc Schlenker

1. LES POLYÈDRES FLEXIBLES

1.1. Les polyèdres dans \mathbf{R}^3

On considère ici des polyèdres non nécessairement convexes dans l'espace euclidien de dimension 3, qu'on notera simplement \mathbf{R}^3 . Un polyèdre sera donné sous la forme d'un complexe simplicial fini P_0 homéomorphe à une surface compacte orientable, muni d'une application $\phi : P_0 \rightarrow \mathbf{R}^3$ affine sur les triangles.

On dira que P est *plongé* lorsque l'application ϕ est injective, et qu'il est seulement *immergé* lorsque ϕ est injective au voisinage de chaque point

Comme on a supposé P_0 orientable, un polyèdre délimite un domaine fermé borné de \mathbf{R}^3 , qui n'est pas nécessairement connexe lorsque P_0 n'est pas plongé. On peut considérer son volume; il sera toujours question ici du volume *algébrique*, c'est-à-dire que chaque composante connexe du complémentaire du polyèdre sera comptée avec un signe et éventuellement une multiplicité. Bien sur, pour les polyèdres plongés, ces distinctions n'interviennent que pour le signe du volume.

1.2. Polyèdres flexibles et infinitésimalement flexibles

Aspects de la rigidité. Etant donné un polyèdre P dans \mathbf{R}^3 , on peut se demander s'il est rigide, c'est-à-dire si on peut le déformer sans changer la forme de ses faces (aux déplacements de \mathbf{R}^2 près). Cette question a en fait plusieurs versions principales distinctes :

- la **rigidité infinitésimale** : est-il possible de trouver un déplacement infinitésimal (i.e. au premier ordre) des sommets de P dans \mathbf{R}^3 , qui ne change pas au premier ordre la longueur de ses arêtes — et donc, puisque les faces sont des triangles, qui ne change pas la forme de ses faces ? Bien entendu il faut se restreindre aux déformations qui ne sont pas triviales (i.e. qui ne proviennent pas d'un

déplacement de P , ou en termes plus pédants d'un champs de Killing de \mathbf{R}^3 restreint aux sommets de P).

- la **flexibilité** : peut-on trouver une famille continue à un paramètre $(P_t)_{t \in [0,1]}$, avec $P_0 = P$, telle que pour tout $t \in [0,1]$, P_t ait la même combinatoire que P et des arêtes de même longueur ? Là encore on doit considérer des “flexions” non-triviales, c'est-à-dire qui ne consistent pas simplement en un déplacement de P .
- la **rigidité globale** : si P' est un polyèdre de \mathbf{R}^3 qui a la même combinatoire que P et des arêtes de même longueur, P' est-il l'image de P par un déplacement ?

Ces propriétés sont en générales distinctes, même si des relations existent entre elles. Elles existent d'ailleurs non seulement pour les polyèdres mais aussi pour les surfaces régulières. Par exemple, on ne sait toujours pas si les surfaces compactes régulières de \mathbf{R}^3 peuvent être flexibles (dans la classe des surfaces régulières).

Réalisabilité. Une question liée à la rigidité des polyèdres est la réalisabilité d'une métrique. Etant donné un polyèdre P_0 , vu comme un objet combinatoire — un complexe simplicial fini homéomorphe à une surface compacte orientable — et étant donné, pour chaque arête de P_0 , un nombre réel positif, on se demande s'il existe un polyèdre dans \mathbf{R}^3 , de même combinatoire que P_0 , et dont les longueurs des arêtes sont les nombres qu'on s'est donné.

Pour les polyèdres convexes on dispose grâce à Aleksandrov [Ale58] d'une réponse partielle à cette question, et plus précisément d'une réponse complète à une question parallèle (voir plus bas). Dans le cas général, on sait très peu de choses, voir quand même [BZ95].

Rigidité d'ordre supérieur. Il existe des notions de rigidité d'ordre supérieur, similaires à la rigidité infinitésimale. La définition même de ces notions est intéressante; on renvoie le lecteur à [Con93, CS94], et à [Sab92] pour les questions analogues concernant les surfaces régulières.

Rigidité d'autres structures. Les questions de rigidité ne se posent pas seulement pour les polyèdres, mais aussi pour d'autres structures qui modélisent plus précisément les problèmes appliqués où la rigidité intervient (mécanique, architecture, etc). Voir par exemple [Con93, TW00, CW94].

1.3. Polyèdres convexes

Quand on se restreint aux polyèdres convexes, la situation se simplifie considérablement. Le premier résultat dans ce domaine résout la question de la rigidité globale des polyèdres convexes dans \mathbf{R}^3 . Les polyèdres convexes qu'on considère ici sont des bords de corps convexes polyédraux dans \mathbf{R}^3 .

THÉORÈME 1.1 (Legendre, Cauchy [Cau13]). — *Les polyèdres euclidiens convexes sont uniquement déterminés par leur combinatoire et la forme de leurs faces.*

Ce théorème est en général attribué à Cauchy. Pourtant, l'une au moins des idées principales de la preuve est due à Legendre [LegII], qui a démontré le théorème pour certaines classes de polyèdres. La contribution de Legendre est mal connue car elle se trouve seulement dans la première édition de ses *Eléments de géométrie*, mais n'a pas été reprise dans les éditions ultérieures. Elle a été "redécouverte" par Lebesgue, puis à nouveau récemment par Sabitov. Par ailleurs la preuve de Cauchy contenait deux petites erreurs corrigées respectivement par Steinitz [Ste16] et Lebesgue [Leb09].

Legendre ne prétend d'ailleurs pas à la paternité de l'énoncé; il remarque en effet, suivant Robert Simson, que l'énoncé du théorème 1.1 se trouve de manière au moins implicite dans les *Eléments* d'Euclide (livre XI, définitions 9 et 10), mais sans démonstration.

Ce théorème a aussi une version infinitésimale, obtenue par M. Dehn. Elle peut être obtenue en utilisant les arguments de la preuve de Cauchy (mais la preuve de Dehn était différente).

THÉORÈME 1.2 (Dehn [Deh16]). — *Les polyèdres euclidiens convexes sont infinitésimalement rigides.*

La preuve peut dans une certaine mesure être étendue à certains polyèdres non convexes, mais qui possèdent certaines propriétés des polyèdres convexes (voir [Sto68, RR00]).

De la rigidité à la réalisation des métriques. Le résultat de rigidité de Cauchy est un élément fondamental dans un beau résultat d'Aleksandrov [Ale58], qui peut être considéré comme son extension naturelle. Pour l'énoncer, il faut d'abord parler de métriques à singularités coniques sur les surfaces.

Considérons un cône dans l'espace euclidien de dimension 3. Sa métrique induite est plate sauf en son sommet, où elle est singulière. En ce point, elle est peut être obtenue en quotientant le revêtement universel de $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ par une rotation d'angle θ autour de 0. L'angle θ est alors appelé angle total autour du point singulier, et $2\pi - \theta$ est la courbure singulière en ce point.

Une métrique plate à singularités coniques sur une surface est une métrique qui est plate, c'est-à-dire localement isométrique au plan euclidien, sauf en un nombre fini de points qui ont un voisinage isométrique à un voisinage d'un sommet d'un cône, comme on vient de les décrire.

THÉORÈME 1.3 (Aleksandrov [Ale58]). — *Soit P un polyèdre euclidien convexe. La métrique induite sur son bord est une métrique plate sur S^2 à singularités coniques, et toutes les singularités sont à courbure singulière positive. Réciproquement, toute métrique de ce type est induite sur le bord d'un unique polyèdre euclidien convexe.*

Dans cet énoncé, l'unicité doit s'entendre aux isométries globales de \mathbf{R}^3 près. On est donc passé d'un résultat de *caractérisation* des polyèdres par leur combinatoire et la forme de leurs faces, à une *relation bijective* entre les polyèdres et certaines métriques sur la sphère.

Le résultat d'Aleksandrov est démontré d'une manière implicite. Pour chaque métrique à singularité conique à courbure positive sur la sphère, il énonce l'existence d'un polyèdre dont c'est la métrique induite — mais sans donner aucune indication sur la combinatoire de ce polyèdre.

Une question ouverte. Il existe quand même quelques questions ouvertes concernant la rigidité infinitésimale des polyèdres euclidiens convexes. En particulier :

CONJECTURE 1.4 (Stoker [Sto68]). — *Soit P un polyèdre convexe. Si une déformation infinitésimale de P ne change pas, au premier ordre, ses angles dièdres, alors elle ne change pas non plus les angles intérieurs de ses faces.*

On peut aussi énoncer une version non infinitésimale de cette question : si deux polyèdres convexes ont la même combinatoire, et si leurs angles dièdres sont les mêmes, les angles intérieurs de leurs faces sont-ils identiques ? On trouvera aussi ci-dessous la version hyperbolique de cette conjecture, dont l'énoncé est plus simple encore.

1.4. Polyèdres flexibles

Les octaèdres flexibles. Bricard [Bri97] a caractérisé tous les octaèdres euclidiens flexibles. Il a en montré qu'il n'existe pas de tel octaèdre plongé ou même immergé, mais qu'il existe trois familles d'octaèdres — ayant des intersections entre leurs faces au voisinage de certains de leurs sommets — qui sont flexibles.

Les polyèdres “plongés” flexibles. Au cours des années 1970, la question de la rigidité des polyèdres est revenue sur le devant de la scène. Le principal résultat a été la construction par R. Connelly [Con77, Kui79] d'un exemple de polyèdre flexible plongé dans \mathbf{R}^3 .

Peu de temps après la découverte de Connelly, d'autres exemples plus simples ont été mis à jour; le plus simple exemple connu à ce jour a été construit par K. Steffen, et il n'a que neuf sommets (il est décrit dans [Con79]). Le lecteur intéressé pourra trouver sur le web une multitude de pages décrivant ces exemples, parfois avec de belles images.

Ces exemples restent tout de même assez exceptionnels; les polyèdres sont “génériquement” rigides, ça a été montré par H. Gluck [Glu75] quand le genre est 0, et dans [Sab02] pour un genre quelconque.

2. LE THÉORÈME DES SOUFFLETS

C'est le résultat suivant.

THÉORÈME 2.1 (Sabitov [Sab96]). — *Soit P un polyèdre flexible dans \mathbf{R}^3 . Lors d'une flexion de P , son volume ne change pas.*

Notons que cet énoncé ne s'applique pas aux déformations infinitésimales d'un polyèdre. Par exemple, si un polyèdre a un “faux” sommet s , dont un voisinage est contenu dans

un plan p , il est facile de voir que les déformations infinitésimales obtenues en déplaçant s orthogonalement à p ne changent pas les longueurs des arêtes, tout en changeant le volume.

2.1. Historique ??

L'origine de cette conjecture n'est pas parfaitement établie. D'après une rumeur insistante, sa première vérification expérimentale aurait eu lieu, dans les années 1970, à l'I.H.É.S. grâce à un modèle de polyèdre flexible qui s'y trouve toujours, et qui est pourvu d'un trou dans l'une de ses faces. D. Sullivan y aurait soufflé la fumée de sa pipe avant d'actionner le polyèdre; ne voyant pas de fumée sortir, il aurait conclu que le volume reste constant au cours de la déformation. La conjecture est en tous cas énoncée en détail dans l'exposé [Con80] de R. Connelly au Congrès International des Mathématiciens d'Helsinki en 1978, avec une référence à D. Sullivan.

2.2. Propriétés algébriques du volume

La formule de Héron. Soit T un triangle euclidien, et soient a, b et c les longueurs de ses cotés. Une formule qui porte parfois le nom du mathématicien grec Héron exprime l'aire de T en fonction des longueurs des cotés : si $p = (a + b + c)/2$ est le demi-périmètre de T , alors son aire vérifie l'équation :

$$A^2 - p(p - a)(p - b)(p - c) = 0 .$$

Le lecteur intéressé devrait en trouver la preuve sans trop d'efforts.

Il existe une formule analogue qui donne le volume d'un simplexe de dimension trois en fonction de la longueur de ses arêtes. Elle était apparemment connue de Tartaglia, et probablement avant lui, et a été redécouverte en particulier par L. Euler. On ne l'énoncera pas ici car la formule de Cayley-Menger (voir plus bas) fournit une autre formule de ce type, conceptuellement plus simple.

Le théorème 2.2 ci-dessous peut être vu comme une extension de cette formule. Il assure que le volume de chaque polyèdres de \mathbf{R}^3 est racine d'une équation polynômiale dont les coefficients dépendent seulement (de manière polynômiale) des longueurs de ses arêtes.

Le volume des polyèdres comme racine. Le théorème des Soufflets s'explique par le résultat plus fondamental suivant.

THÉORÈME 2.2 (Sabitov). — *Soit P_0 un polyèdre (combinatoire) ayant e arêtes. Il existe des polynômes c_0, c_1, \dots, c_n en e variables à coefficients entiers tels que, si P est un polyèdre de \mathbf{R}^3 combinatoirement équivalent à P_0 et dont les longueurs des arêtes sont l_1, \dots, l_e , alors $12\text{vol}(P)$ est racine de :*

$$X^{2n} + c_1(l_1^2, \dots, l_e^2)X^{2n-2} + c_2(l_1^2, \dots, l_e^2)X^{2n-4} + \dots + c_n(l_1^2, \dots, l_e^2) = 0 .$$

Ce théorème implique directement le théorème 2.1. Sa preuve, donnée dans [Sab96], est constructive. Il admet un autre énoncé, légèrement plus faible mais dont la preuve est plus agréable, bien qu'elle ne soit pas constructive.

Rappelons que, si L est un corps et $R \subset L$ est un sous-anneau, un élément $x \in L$ est entier sur R s'il existe un polynôme unitaire à coefficients dans R dont x est racine.

THÉORÈME 2.3 (Connelly, Sabitov, Walz [CSW97]). — *Soit P un polyèdre dans \mathbf{R}^3 . Alors $12\text{vol}(P)$ est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des arêtes de P .*

Nous nous contenterons ici d'indiquer la preuve du théorème 2.3; le lecteur intéressé par la preuve du théorème 2.2 est invité à consulter [Sab98c], ou [Sab98b] pour une preuve légèrement différente.

Notons qu'il n'est pas nécessaire pour le théorème 2.2 de supposer que le polyèdre considéré est plongé; en fait la preuve est de nature algébrique, si bien que les dégénérescences sont autorisées.

3. LA PREUVE

Il existe maintenant plusieurs preuves de la conjecture des Soufflets, à travers les théorèmes 2.2 ou 2.3. Nous présentons ici une preuve du théorème 2.3 due à Connelly, Sabitov et Walz [CSW97], qui a l'avantage d'être conceptuellement simple et de nécessiter peu de calculs. Par contre elle n'est pas constructive concernant le polyèdre unitaire dont le volume est racine.

Le principe de la preuve est de montrer, par un argument récursif sur la "complexité" des polyèdres, que, pour chaque polyèdre (combinatoire) P , chaque place sur \mathbf{R} qui est finie sur le corps engendré par les carrés des longueurs des arêtes de P est aussi finie sur $12\text{vol}(P)$.

3.1. Préliminaires algébriques

On utilise la notion usuelle suivante de place sur un corps; voir par exemple [Lan72].

DÉFINITION 3.1. — *Soit L et F des corps. Une **place** sur L à valeurs dans F est une application $\phi : L \rightarrow F \cup \{\infty\}$ telle que, pour tout $x, y \in L$:*

- $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$.
- $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$.
- $\phi(1) = 1$.

Cette définition sous-entend que ∞ se comporte par rapport à l'addition et à la multiplication comme on peut s'y attendre : si $a \in F$, alors $a \pm \infty = \infty$, $a/\infty = 0$, $a\infty = \infty$ si

$a \neq 0$, et $1/0 = \infty$. Les expressions ∞/∞ , 0∞ et $\infty \pm \infty$ ne sont pas définies, et les conditions de la définition précédente ne s'appliquent que lorsque les termes correspondants sont définis.

Le lemme suivant est classique, voir [Lan72].

LEMME 3.2. — *Soit L un corps contenant un anneau R . Un élément $x \in L$ est entier sur R si et seulement si toute place sur L qui est finie sur R est finie en x .*

On en déduit par exemple immédiatement le résultat important suivant : si $x, y \in L$ sont des éléments entiers sur R , alors $x + y$ et $x - y$ sont entiers sur L .

3.2. Le déterminant de Cayley-Menger

Soit p_0, p_1, \dots, p_n des points de \mathbf{R}^N , et, pour $1 \leq i, j \leq n$, soit $d_{ij} := \|p_i - p_j\|$. Le déterminant de Cayley-Menger des p_i est défini par :

$$CM(p_0, p_1, \dots, p_n) := \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & d_{01}^2 & d_{02}^2 & \dots & d_{0n}^2 \\ 1 & d_{01}^2 & 0 & d_{12}^2 & \dots & d_{1n}^2 \\ 1 & d_{02}^2 & d_{12}^2 & 0 & \dots & d_{2n}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & d_{0n}^2 & d_{1n}^2 & d_{2n}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

A un coefficient près, ce déterminant donne le carré du volume du simplexe de dimension n dont les sommets sont les p_i . La relation précise est indiquée par le lemme élémentaire mais fondamental suivant. On pourra consulter [Ber77] pour la preuve.

LEMME 3.3. — *Soit $N \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, et soient $p_0, p_1, \dots, p_n \in (\mathbf{R}^N)^n$. Alors :*

$$CM(p_0, p_1, \dots, p_n) = (-1)^{n+1} 2^n (n!)^2 \text{vol}_n^2 \Sigma(p_0, p_1, \dots, p_n) ,$$

où $\Sigma(p_0, p_1, \dots, p_n)$ est le simplexe dont les sommets sont les p_i , et vol_n est le volume orienté n -dimensionnel.

Conséquences. On utilisera deux conséquences distinctes de ce lemme. La première, obtenue en prenant $n = 3$, indique que le volume d'un simplexe de \mathbf{R}^3 est une fonction polynômiale des carrés des longueurs de ses arêtes.

COROLLAIRE 3.4. — *Soit $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^3$. Alors :*

$$CM(p_0, p_1, p_2, p_3) = 2(12\text{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3)))^2 .$$

COROLLAIRE 3.5. — *Soit $p_0, p_1, p_2, p_3 \in \mathbf{R}^3$. Alors $12\text{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3))$ est entier sur l'anneau engendré par les carrés des longueurs des distances entre les p_i .*

Preuve. — La symétrie du déterminant de Cayley-Menger permet de montrer sans grande difficulté que, lorsque on le développe, chacun des termes apparaît deux fois. Ainsi, $(12\text{vol}(\Sigma(p_0, p_1, p_2, p_3)))^2$ est dans l’anneau engendré par les carrés des longueurs entre les p_i , et le résultat suit. \square

Ceci implique en particulier directement que le théorème 2.2 est vrai pour les simplexes, et plus généralement pour tous les polyèdres qu’on peut décomposer en simplexes sans ajouter d’arête; par exemple pour les polyèdres ci-dessous.

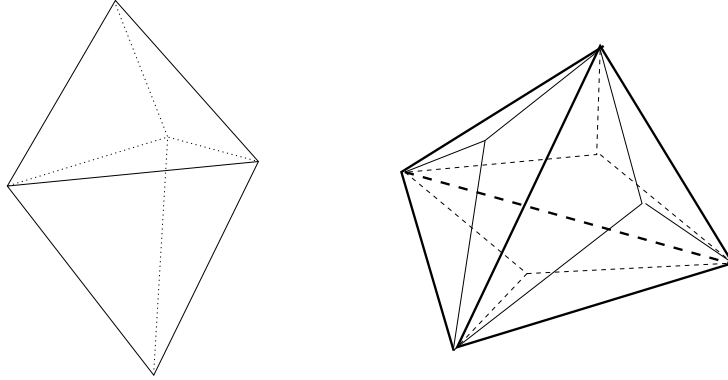


FIGURE 1. Polyèdres décomposables en simplexes

La seconde conséquence est que, lorsque on considère cinq points dans \mathbf{R}^3 , les carrés des longueurs des segments qui les joignent satisfont à une équation polynômiale.

COROLLAIRE 3.6. — Soit $p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbf{R}^3$. Alors :

$$CM(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) = 0 .$$

3.3. Un lemme sur les pyramides

Le cœur de la preuve est constitué du lemme suivant, qui permet de montrer que si une place ϕ est finie en tous les carrés des longueurs des arêtes d’un polyèdre, on peut “souvent” extraire de ce polyèdre un simplexe Σ tel que ϕ est finie sur le volume au carré de Σ . Dans l’énoncé on identifie les éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$ avec $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, ce qui revient à identifier de manière cyclique $n + 1$ à 1.

LEMME 3.7. — Soit $n \geq 4$ et soient q, p_1, p_2, \dots, p_n des points de \mathbf{R}^3 . Pour tout $i, j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, notons $d_i := d(q, p_i)$ et $d_{i,j} := d(p_i, p_j)$. Soit ϕ une place sur \mathbf{R} . Supposons que, pour tout $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\phi(d_i^2)$ et $\phi(d_{i,i+1}^2)$ sont finis. Alors il existe $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $\phi(d_{i,i+2}^2)$ est fini.

Exemples assez simples. Avant de continuer la preuve du théorème 2.3, on peut remarquer que le lemme précédent prouve déjà le résultat pour les pyramides.

Commençons par une pyramide Π dont la base est un quadrilatère $(abcd)$. Soit ϕ une place sur \mathbf{R} , qui est finie sur l’anneau engendré par les carrés des longueurs des cotés.

D'après le lemme 3.7, ϕ est finie aussi sur l'une des diagonales, c'est-à-dire soit $[ac]$, soit $[bd]$. Décomposons la pyramide en ajoutant cette arête, son volume apparaît alors comme la somme des volumes de deux simplexes S_1 et S_2 . D'après le corollaire 3.5, ϕ est finie sur $12\text{vol}(S_1)$ et sur $12\text{vol}(S_2)$, et donc aussi sur $\text{vol}(\Pi)$. Comme c'est vrai pour tout ϕ , le lemme 3.2 montre que le théorème 2.3 est vrai pour Π .

En fait cet argument s'applique essentiellement à n'importe quelle pyramide Π . Quand la base a plus de quatre cotés, il faut appliquer le lemme 3.7 pour montrer que, étant donné une place ϕ , on peut retirer un simplexe à Π en faisant apparaître une nouvelle arête a telle que ϕ est finie sur le carré de la longueur de a . Un argument de récurrence sur le nombre de cotés de la base montre ensuite que ϕ est finie sur $12\text{vol}(\Pi)$, et le lemme 3.2 permet à nouveau de conclure.

Preuve du lemme 3.7. On va procéder par l'absurde et faire l'hypothèse suivante :

$$\forall i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, \phi(d_{i,i+2}^2) \text{ est infini} \quad (H)$$

On va utiliser (H) pour montrer, par récurrence sur i , que, pour tout $3 \leq i \leq n$, on a :

$$\phi(d_{1,i}^2) \text{ et } \phi(d_{1,i}^2/d_{1,i-1}^2) \text{ sont infinis} \quad (H_i)$$

(H_n) fournira une contradiction puisque on a supposé que $\phi(d_{1,n}^2)$ est fini.

Il est clair que (H) implique (H_3) ; on suppose donc (H_i) vrai, pour montrer (H_{i+1}) . Il suffit, pour cela, de montrer que $\phi(d_{1,i+1}^2/(d_{1,i}d_{1-i,1+i})^2)$ est non nul; d'après (H) , il suit que $\phi(d_{1,i+1}^2/d_{1,i}^2)$ est infini, puis, avec (H_i) , que $\phi(d_{1,i+1}^2)$ est infini. Pour obtenir ce résultat, on raisonne à nouveau par l'absurde, et on suppose que $\phi(d_{1,i+1}^2/(d_{1,i}d_{1-i,1+i})^2) = 0$.

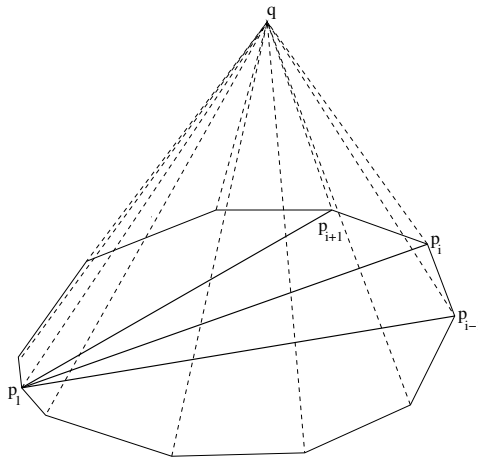


FIGURE 2. La récurrence

On applique d'abord le corollaire 3.6 aux points $p_1, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}$ et q , et on obtient que :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & d_{1,i-1}^2 & d_{1,i}^2 & d_{1,i+1}^2 & d_1^2 \\ 1 & d_{1,i-1}^2 & 0 & d_{i-1,i}^2 & d_{i-1,i+1}^2 & d_{i-1}^2 \\ 1 & d_{1,i}^2 & d_{i-1,i}^2 & 0 & d_{i,i+1}^2 & d_i^2 \\ 1 & d_{1,i+1}^2 & d_{i-1,i+1}^2 & d_{i,i+1}^2 & 0 & d_{i+1}^2 \\ 1 & d_1^2 & d_{i-1}^2 & d_i^2 & d_{i+1}^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

On divise la deuxième ligne et la deuxième colonne par $d_{1,i}^2$, et la cinquième ligne et la cinquième colonne par $d_{i-1,i+1}^2$. On obtient ainsi que :

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{d_{1,i}^2} & 1 & 1 & \frac{1}{d_{i-1,i+1}^2} & 1 \\ \frac{1}{d_{1,i}^2} & 0 & \frac{d_{1,i-1}^2}{d_{1,i}^2} & 1 & \frac{d_{1,i+1}^2}{(d_{1,i}d_{i-1,i+1})^2} & \frac{d_1^2}{d_{1,i}^2} \\ 1 & \frac{d_{1,i-1}^2}{d_{1,i}^2} & 0 & d_{i-1,i}^2 & 1 & d_{i-1}^2 \\ 1 & 1 & d_{i-1,i}^2 & 0 & \frac{d_{i,i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} & d_i^2 \\ \frac{1}{d_{i-1,i+1}^2} & \frac{d_{1,i+1}^2}{(d_{1,i}d_{i-1,i+1})^2} & 1 & \frac{d_{i,i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} & 0 & \frac{d_{i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} \\ 1 & \frac{d_1^2}{d_{1,i}^2} & d_{i-1}^2 & d_i^2 & \frac{d_{i+1}^2}{d_{i-1,i+1}^2} & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

On compose cette égalité par ϕ . D'après (H_i) , $\phi(d_{1,i-1}^2/d_{1,i}^2) = \phi(1/d_{1,i}^2) = 0$, et (H) indique que $\phi(1/d_{i-1,i+1}^2) = 0$. Ainsi :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \phi(d_{i-1,i}^2) & \mathbf{1} & \phi(d_{i-1}^2) \\ 1 & \mathbf{1} & \phi(d_{i-1,i}^2) & 0 & 0 & \phi(d_i^2) \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \phi(d_{i-1}^2) & \phi(d_i^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \phi(0) = 0 .$$

Tous les éléments de ce déterminant sont finis. Pour le développer, on voit que les deuxième ligne et deuxième colonne, ainsi que les cinquièmes ligne et colonne, ne contiennent qu'un seul élément non nul (en gras). Ainsi le déterminant est égal à 1, d'où la contradiction recherchée.

3.4. Découpages d'un polyèdre

Soit P un polyèdre dans \mathbf{R}^3 , et soit ϕ une place sur \mathbf{R} , qui prend des valeurs finies aux carrés des longueurs de P . Soit q un sommet de P par lequel ne passe aucun chemin fermé composé de trois arêtes de P qui ne bordent pas de face. Soient p_1, p_2, \dots, p_n les sommets adjacents à q . D'après le lemme 3.7, il existe alors $i_0 \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que $\phi(d(p_{i_0-1}, p_{i_0+1})^2)$ est fini. On appelle P' le polyèdre obtenu en "enlevant" à P le simplexe de sommets $q, p_{i_0-1}, p_{i_0}, p_{i_0+1}$: on supprime le sommet q et les arêtes et faces qui lui sont adjacentes, et on ajoute un triangle dont les sommets sont $p_{i_0-1}, p_{i_0}, p_{i_0+1}$.

On obtient ainsi en utilisant le corollaire 3.5 l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 3.8. — *Si $12\phi(\text{vol}(P'))$ est fini, alors $12\phi(\text{vol}(P))$ est fini.*

Il faut noter pour la suite que, quand on passe de P à P' , la valence du sommet q diminue d'une unité.

Preuve du corollaire. — Il est clair que ϕ prend aussi des valeurs finies aux carrés des autres longueurs du simplexe Σ de sommets $q, p_{i_0-1}, p_{i_0}, p_{i_0+1}$. Donc, d'après le corollaire 3.5, ϕ prend une valeur finie en $12\text{vol}(\Sigma)$. Comme par hypothèse $\phi(12\text{vol}(P_i))$ est fini aussi, on obtient que $\phi(12\text{vol}(P))$ est fini. \square

3.5. Un argument de récurrence

On associe à chaque polyèdre P , non nécessairement connexe, le quadruplet (g, n, c, v) , où g est la somme des genres des composantes connexes de P , c le nombre de ses composantes connexes, n le nombre de ses sommets, et v la valence minimale de ses sommets. Etant donné deux polyèdres P et P' , de quadruplets associés (g, c, n, v) et (g', c', n', v') respectivement, on dira que P est moins complexe que P' si l'une des conditions suivantes est satisfaite :

- $g < g'$;
- $g = g'$, et $c > c'$.
- $g = g'$, $c = c'$, et $n < n'$.
- $g = g'$, $n = n'$, $c = c'$, et $v < v'$.

Etant donné un polyèdre P , on lui associe une suite de polyèdres $P_0 = P, P_1, \dots, P_N$, avec $N \in \mathbf{Z}$, non nécessairement connexes, définis récursivement à partir de $P_0 = P$ en appliquant tant que c'est possible l'une des opérations suivantes.

- (1) S'il existe sur P_i un chemin fermé composé de trois arêtes, et qui ne borde pas de face, on coupe P_i suivant le triangle dont le bord est ce chemin. On obtient ainsi un polyèdre P_{i+1} , qui peut avoir soit un genre total inférieur à celui de P_i , soit une composante connexe de plus que P_i .
- (2) Sinon on choisit un sommet q de P_i de valence minimale, et on lui applique le corollaire 3.8; on appelle P_{i+1} le polyèdre P' obtenu.

Il est facile de vérifier que dans, tous les cas, P_{i+1} est moins complexe que P_i :

- dans le cas (1), parce que P_{i+1} a soit un genre total inférieur, soit un nombre de composantes connexes supérieur à ceux de P_i .
- dans le cas (2), parce que la valence minimale des sommets de P_{i+1} est inférieure d'une unité à celle des sommets de P_i .

Finalement, on vérifie que P_N est nécessairement une réunion disjointe de simplexes, sans quoi on pourrait trouver un polyèdre P_{N+1} moins complexe que P_N par l'une des opérations décrites ci-dessus.

Preuve du théorème 2.3. Soit P un polyèdre dans \mathbf{R}^3 , et soit ϕ une place qui est finie sur l'ensemble des carrés des longueurs des arêtes de P . Soit $P_0 = P, P_1, \dots, P_N$ la suite de polyèdres définie plus haut (qui dépend de ϕ). P_N est une réunion disjointe de simplexes, et, par construction, ϕ est finie sur les carrés des longueurs de ses arêtes. Ainsi, $\phi(12\text{vol}(P_N))$ est fini d'après le corollaire 3.5.

La construction de $(P_i)_{0 \leq i \leq N}$ permet ensuite de montrer, par récurrence inverse sur i , que $\phi(12\text{vol}(P_i))$ est fini pour tout $i \in \{0, 1, \dots, N\}$, et ceci est en particulier vrai pour P . Le théorème suit donc par application du lemme 3.2.

4. PRÉCISIONS, VARIANTES

4.1. Polynômes minimaux

Dans [AS99], Astrelin et Sabitov montrent qu'il existe, pour chaque polyèdre (combinatoire) de genre $g = 0$, un unique polynôme minimal qui annule le volume.

THÉORÈME 4.1 (Astrelin, Sabitov). — *Soit P_0 un polyèdre (vu comme objet combinatoire) et soient a_1, \dots, a_N ses arêtes. Il existe un polynôme unitaire $Q \in \mathbf{Q}[l][V]$, à coefficients dans les polynômes à N indéterminées à coefficients rationnels, avec la propriété suivante. Soit P un polyèdre dans \mathbf{R}^3 ayant la combinatoire de P_0 , soient $(l_i)_{1 \leq i \leq N}$ les longueurs de ses arêtes et soit V son volume. Alors $Q(l_i^2)(12V) = 0$.*

De plus, il existe un unique polynôme ayant cette propriétés et de degré minimal, et il divise tous les autres.

4.2. Autres applications

Les méthodes développées pour montrer le théorème 2.2 ont d'autres applications à la théorie métrique des polyèdres dans \mathbf{R}^3 . Par exemple, dans [Sab02], Sabitov montre que les longueurs de certaines "diagonales" d'un polyèdre — des segments joignant deux sommets, mais qui ne sont pas des arêtes — ont pour longueur des racines d'équations polynomiales dont les coefficients dépendent des longueurs des arêtes. Il en déduit une preuve du fait (connu depuis [Glu75] en genre 0) que les polyèdres dans \mathbf{R}^3 sont génériquement rigides. Le lecteur pourra trouver d'autres applications intéressantes dans [Sab98a, Sab01].

4.3. Généralisations directes

La nature essentiellement algébrique de la preuve du théorème 2.3, ainsi d'ailleurs que celle du théorème 2.2 qu'on pourra trouver dans [Sab98c], indiquent que le résultat n'est pas limité au cas où le corps de base est \mathbf{R} .

5. AU-DELÀ DE \mathbf{R}^3

On va considérer maintenant les généralisations possibles des résultats énoncés plus haut à d'autres contextes géométriquement intéressants.

5.1. L'espace de Minkowski

L'espace de Minkowski de dimension trois est simplement \mathbf{R}^3 , muni de la forme quadratique $dx^2 + dy^2 - dz^2$. C'est une variété lorentzienne plate complète, qu'on notera ici \mathbf{R}_1^3 . La structure affine provenant de sa connexion de Levi-Civita est identique à celle de \mathbf{R}^3 .

La rigidité infinitésimale des polyèdres convexes de \mathbf{R}_1^3 est une conséquence directe du résultat de Cauchy dans \mathbf{R}^3 ; en effet, il est immédiat que, si V est une déformation infinitésimale isométrique d'un polyèdre convexe $P \subset \mathbf{R}_1^3$, et si V a pour coordonnées (X, Y, Z) , alors le vecteur V' de coordonnées $(X, Y, -Z)$ est une déformation isométrique infinitésimale de P vu comme un polyèdre de \mathbf{R}^3 ; de plus, V' est trivial si et seulement si V l'est.

V. Alexandrov [Ale01] a montré que la preuve du théorème 2.2 peut être étendue à l'espace de Minkowski. La conjecture des Soufflets y est donc encore valable.

5.2. Polyèdre hyperboliques et sphériques

L'espace hyperbolique et la sphère. On peut aussi remplacer l'espace euclidien par un autre espace riemannien de dimension trois à courbure constante. Les deux candidats naturels sont la sphère de dimension trois munie de sa métrique habituelle, qu'il n'est pas nécessaire de présenter au lecteur, et l'espace hyperbolique de dimension trois, qu'on peut voir comme une sous-variété de l'espace de Minkowski de dimension quatre, muni de la métrique induite :

$$H^3 := \{x \in \mathbf{R}_1^4 \mid \langle x, x \rangle = 1 \wedge x_0 > 0\} .$$

Modèles projectifs. Il existe une application $\rho_H : H^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$, dont l'image est la boule de rayon 1 dans \mathbf{R}^3 , et qui a la propriété remarquable d'envoyer les géodésiques de H^3 sur des segments géodésiques dans \mathbf{R}^3 . On en déduit le "modèle projectif", aussi appelé "modèle de Klein", de H^3 .

En conséquence, on peut associer à chaque polyèdre de H^3 un polyèdre de \mathbf{R}^3 , qui est simplement son image par ρ_H .

De même, il existe une application ρ_S entre un hémisphère (ouvert) de S^3 et \mathbf{R}^3 , qui envoie les demi grands cercles de la source sur les géodésiques de \mathbf{R}^3 . On peut donc aussi associer à chaque polyèdre de S^3 contenu dans un hémisphère (ouvert) un polyèdre euclidien.

La rigidité infinitésimale est une propriété projective. Un résultat ancien mais frappant affirme que la rigidité infinitésimale est une propriété purement projective.

THÉORÈME 5.1 (Darboux [Dar93], Sauer [Sau35]). — *Soit P un polyèdre Euclidien, et soit u une transformation projective de \mathbf{R}^3 . Alors P est infinitésimalement rigide si et seulement si $u(P)$ l'est.*

Cet énoncé est lié à un autre fait remarquable : un polyèdre hyperbolique (ou un polyèdre sphérique contenu dans un hémisphère) est infinitésimalement rigide si et seulement si le polyèdre euclidien qui lui est associé par le modèle projectif l'est.

THÉORÈME 5.2 (Pogorelov [Pog73]). — *Soit P un polyèdre hyperbolique (resp. sphérique). Alors P est infinitésimalement rigide si et seulement si son image dans le modèle projectif de H^3 (resp. de S^3) l'est.*

La relation avec le théorème précédent tient au fait que composer à droite les applications ρ_H ou ρ_S par une isométrie revient à composer à gauche par une transformation projective de \mathbf{R}^3 .

En d'autres termes, les images de P dans \mathbf{R}^3 pour deux choix différents du modèle projectif diffèrent par une transformation projective.

Polyèdres convexes. En utilisant le théorème précédent et le théorème de rigidité de Cauchy, on obtient immédiatement l'énoncé suivant.

COROLLAIRE 5.3. — *Les polyèdres convexes hyperboliques (resp. sphériques) sont infinitésimalement rigides.*

Dualité. Dans S^3 et H^3 , la rigidité des polyèdres convexes admet une propriété "duale" : les polyèdres convexes sont aussi déterminés par leur "métrique duale", une métrique à courbure constante 1 et à singularités coniques pour laquelle la somme des angles autour des points singuliers est supérieure à 2π pour H^3 , inférieure pour S^3 . La métrique duale d'un polyèdre est partiellement déterminée par ses angles dièdres.

Ces résultats s'expliquent par des phénomènes de dualité, d'une part à l'intérieur de la classe des polyèdres convexes de S^3 , d'autre part entre les polyèdres convexes de H^3 et les polyèdres convexes de type espace de l'espace de Sitter de dimension trois. Le phénomène hyperbolique a été mis à jour par Rivin et Hodgson [RH93], il est aussi relié aux travaux d'Andreev sur les angles dièdres des polyèdres hyperboliques convexes [And70, And71]. Dans \mathbf{R}^3 , ce phénomène de dualité prend une forme dégénérée, par exemple le phénomène dual de la rigidité infinitésimale des polyèdres convexes est la rigidité dans le problème de Minkowski.

Par contre, on a un analogue hyperbolique très simple de la conjecture de Stoker citée ci-dessus.

CONJECTURE 5.4. — *Soit $P \subset H^3$ un polyèdre convexe. Si une déformation infinitésimale de P ne change pas, au premier ordre, ses angles dièdres, alors elle est triviale.*

Notons d'ailleurs que l'analogie sphérique de cette conjecture est faux.

S'il existait un polyèdre P admettant une déformation infinitésimale qui ne change pas, au premier ordre, ses angles dièdres, on pourrait en prendre deux copies et les recoller en identifiant leurs bords. On obtiendrait ainsi une cône-variété hyperbolique M (voir les notes de Thurston [Thu97] pour une définition) admettant une déformation infinitésimale non-triviale qui ne change pas l'angle autour des singularités.

De plus, la convexité de P signifierait que les angles autour des singularités de M seraient partout inférieurs strictement à 2π , et on peut supposer qu'une cône-variété satisfaisant cette condition n'admet aucune déformation qui ne change pas les angles autour de ses singularités. C'est du moins un résultat récent de Hodgson et Kerckhoff pour les cône-variétés dont le lieu singulier est un link, c'est-à-dire une réunion disjointe de courbes fermées.

Ces considérations de rigidité interviennent dans le théorème d'hyperbolisation des orbifolds de Thurston, voir [BP01] ou [CHK00].

Flexibilité et volume. On peut construire des exemples simples de polyèdres flexibles dans la sphère; il suffit de considérer un polygone $p \subset S^2$, puis de prendre la suspension sphérique de p (ce qui revient à considérer p comme contenu dans un S^2 "équatorial" et à ajouter les deux pôles). Les flexions correspondent aux déformations isométriques de p dans S^2 . V. Alexandrov [Ale97] a remarqué que le volume intérieur de ces polyèdres varie au cours de ces flexions. Le théorème 2.1 est donc faux dans S^3 . Néanmoins ces exemples sont assez particuliers, et il n'est pas exclu qu'une version affaiblie du théorème soit valable, et/ou que l'analogie du théorème 2.1 soit vraie dans l'espace hyperbolique H^3 .

5.3. Dimensions supérieures

On ne connaît pas d'exemple de polyèdre plongé flexible dans \mathbf{R}^4 . Par contre, R. Connelly a donné un exemple très simple de polyèdre flexible immergé. Le théorème 2.3 s'étend à ces polyèdres, cela a été montré par A. Walz.

5.4. Invariants de Dehn

Le troisième des vingt-trois problèmes posés par Hilbert au début du vingtième siècle concerne la possibilité, étant donné deux polyèdres P et P' de même volume dans \mathbf{R}^3 , de découper P et de recomposer les morceaux pour obtenir P' . Cette question a été résolue dès 1901 par Dehn [Deh01] : Dehn a généralisé un invariant introduit auparavant par Bricard [Bri96], appelé invariant de Dehn, préservé par l'opération de découpage et de recomposition. En fait deux polyèdres de \mathbf{R}^3 sont équivalents par découpage et recomposition si et seulement si ils ont même volume et même invariant de Dehn, c'est un résultat de Sydler [Syd65, Jen68, Car86] qui a été montré en 1965.

R. Connelly demande si, lorsqu'on déforme un polyèdre flexible, son invariant de Dehn reste constant.

L'analogie du résultat de Dehn pour les polyèdres sphériques et hyperboliques reste inconnu. I. Sabitov suggère que cela pourrait être rapproché du fait que, pour ces polyèdres, le volume n'est pas fixé lors des déformations isométriques.

Remerciements. L'auteur tient à remercier Victor Alexandrov, Etienne Ghys, Idjad Sabitov et Rabah Souam pour de nombreuses remarques sur le texte.

BIBLIOGRAPHIE

- [Ale58] A. D. Alexandrov. *Konvexe polyeder*. Akademie-Verlag, Berlin, 1958.
- [Ale97] Victor Alexandrov. An example of a flexible polyhedron with nonconstant volume in the spherical space. *Beiträge Algebra Geom.*, 38(1):11–18, 1997.
- [Ale01] Victor Alexandrov. Flexible polyhedra in Minkowski 3-space. Preprint Jussieu, math.MG/0111003, 2001.
- [And70] E.M. Andreev. Convex polyhedra in Lobacevskii space. *Mat. Sb.(N.S.)*, 81 (123):445–478, 1970.
- [And71] E.M. Andreev. On convex polyhedra of finite volume in Lobacevskii space. *Math. USSR Sbornik*, 12 (3):225–259, 1971.
- [AS99] A. V. Astrelin and I. Kh. Sabitov. A canonical polynomial for the volume of a polyhedron. *Uspekhi Mat. Nauk*, 54(2(326)):165–166, 1999.
- [Ber77] Marcel Berger. *Géométrie. Vol. 3*. CEDIC, Paris, 1977. Convexes et polytopes, polyèdres réguliers, aires et volumes.
- [BP01] Michel Boileau and Joan Porti. Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type. *Astérisque*, 272:208, 2001. Appendix A by Michael Heusener and Joan Porti.
- [Bri96] R. Bricard. Sur une question de géométrie relative aux polyèdres. *Nouv. Ann. Math.*, 15:331–334, 1896.
- [Bri97] R. Bricard. Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé. *J. Math. Pur. Appl., Liouville*, 3:113–148, 1897.
- [BZ95] Yu. D. Burago and V. A. Zalgaller. Isometric piecewise-linear embeddings of two-dimensional manifolds with a polyhedral metric into \mathbf{R}^3 . *Algebra i Analiz*, 7(3):76–95, 1995.
- [Car86] Pierre Cartier. Décomposition des polyèdres: le point sur le troisième problème de Hilbert. *Astérisque*, 133-134:261–288, 1986. Seminar Bourbaki, Vol. 1984/85.
- [Cau13] A. L. Cauchy. Sur les polygones et polyèdres, second mémoire. *Journal de l'Ecole Polytechnique*, 19:87–98, 1813.

- [CHK00] Daryl Cooper, Craig D. Hodgson, and Steven P. Kerckhoff. *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, volume 5 of *MSJ Memoirs*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 2000. With a postface by Sadayoshi Kojima.
- [Con77] Robert Connelly. A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra. *Inst. Haut. Etud. Sci., Publ. Math.*, 47:333–338, 1977.
- [Con80] Robert Connelly. Conjectures and open questions in rigidity. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)*, pages 407–414, Helsinki, 1980. Acad. Sci. Fennica.
- [Con93] Robert Connelly. Rigidity. In *Handbook of convex geometry, Vol. A, B*, pages 223–271. North-Holland, Amsterdam, 1993.
- [Con79] Robert Connelly. A flexible sphere. *Math. Intelligencer*, 1(3):130–131, 1978/79.
- [CS94] Robert Connelly and Herman Servatius. Higher-order rigidity—what is the proper definition? *Discrete Comput. Geom.*, 11(2):193–200, 1994.
- [CSW97] R. Connelly, I. Sabitov, and A. Walz. The Bellows conjecture. *Beitr. Algebra Geom.*, 38:1–10, 1997. <http://www.emis.de/journals/BAG/>.
- [CW94] Henry Crapo and Walter Whiteley. Spaces of stresses, projections and parallel drawings for spherical polyhedra. *Beiträge Algebra Geom.*, 35(2):259–281, 1994.
- [Dar93] Gaston Darboux. *Leçons sur la théorie générale des surfaces. III, IV*. Éditions Jacques Gabay, Sceaux, 1993. Reprint of the 1894 original (III) and the 1896 original (IV), Cours de Géométrie de la Faculté des Sciences.
- [Deh01] M. Dehn. Über den Rauminhalt. *Math. Ann.*, 105:465–478, 1901.
- [Deh16] M. Dehn. Über den Starrheit konvexer Polyeder. *Math. Ann.*, 77:466–473, 1916.
- [Glu75] Herman Gluck. Almost all simply connected closed surfaces are rigid. In *Geometric topology (Proc. Conf., Park City, Utah, 1974)*, pages 225–239. Lecture Notes in Math., Vol. 438. Springer, Berlin, 1975.
- [Jen68] B. Jensen. The algebra of polyhedra and the Dehn-Sydler theorem. *Math. Scand.*, 22:241–256, 1968.
- [Kui79] Nicolaas H. Kuiper. Sphères polyédriques flexibles dans E^3 , d’après Robert Connelly. In *Séminaire Bourbaki, 30e année (1977/78)*, volume 710 of *Lecture Notes in Math.*, pages 147–168, Exposé 514. Springer, Berlin, 1979.
- [Lan72] Serge Lang. *Introduction to algebraic geometry*. Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Reading, Mass., 1972. Third printing, with corrections.
- [Leb09] H. Lebesgue. Démonstration complète du théorème de Cauchy sur l’égalité des polyèdres convexes. *Intermédiaire des Mathématiciens*, 16:113–120, 1909.
- [LegII] Legendre. *Eléments de géométrie*. Paris, 1793 (an II). Première édition, note XII, pp.321-334.
- [Pog73] A. V. Pogorelov. *Extrinsic Geometry of Convex Surfaces*. American Mathematical Society, 1973. Translations of Mathematical Monographs. Vol. 35.

- [RH93] I. Rivin and C. D. Hodgson. A characterization of compact convex polyhedra in hyperbolic 3-space. *Invent. Math.*, 111:77–111, 1993.
- [RR00] Lucio Rodríguez and Harold Rosenberg. Rigidity of certain polyhedra in \mathbf{R}^3 . *Comment. Math. Helv.*, 75(3):478–503, 2000.
- [Sab92] I. Kh. Sabitov. Local theory of bendings of surfaces. In *Geometry, III*, volume 48 of *Encyclopaedia Math. Sci.*, pages 179–256. Springer, Berlin, 1992.
- [Sab96] I. Kh. Sabitov. The volume of a polyhedron as a function of its metric. *Fundam. Prikl. Mat.*, 2(4):1235–1246, 1996.
- [Sab98a] I. Kh. Sabitov. The generalized Heron-Tartaglia formula and some of its consequences. *Mat. Sb.*, 189(10):105–134, 1998.
- [Sab98b] I. Kh. Sabitov. A proof of the “bellows” conjecture for polyhedra of low topological genus. *Dokl. Akad. Nauk*, 358(6):743–746, 1998.
- [Sab98c] I. Kh. Sabitov. The volume as a metric invariant of polyhedra. *Discrete Comput. Geom.*, 20(4):405–425, 1998.
- [Sab01] I. Kh. Sabitov. Calculation of polyhedra. *Dokl. Akad. Nauk*, 377(2):161–164, 2001.
- [Sab02] I. Kh. Sabitov. Algorithmic solution of the problem of the isometric realization of two-dimensional polyhedral metrics. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 66(2):159–172, 2002.
- [Sau35] Robert Sauer. Infinitesimale Verbiegungen zueinander projektiver Fläschen. *Math. Ann*, 111:71–82, 1935.
- [Ste16] E. Steinitz. Polyeder und Raumeinteilungen. *Encycl. Math. Wiss.*, 3:1–139, 1916.
- [Sto68] J. J. Stoker. Geometrical problems concerning polyhedra in the large. *Comm. Pure Appl. Math.*, 21:119–168, 1968.
- [Syd65] J.-P. Sydler. Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. *Comment. Math. Helv.*, 40:43–80, 1965.
- [Thu97] William P. Thurston. Three-dimensional geometry and topology. Recent version of the 1980 notes. <http://www.msri.org/publications/books/gt3m/>, 1997.
- [TW00] Tiong-Seng Tay and Walter Whiteley. A homological interpretation of skeletal rigidity. *Adv. in Appl. Math.*, 25(1):102–151, 2000.

Jean-Marc Schlenker

Laboratoire Emile Picard, UMR CNRS 5580

UFR MIG, Université Paul Sabatier

F-31062 Toulouse cedex 4

E-mail : schlenker@picard.ups-tlse.fr