

Московский физико-технический институт  
Факультет физической и квантовой электроники  
Кафедра проблем теоретической физики

# Дипломная работа

## Гамильтонова динамика движения свободной двумерной струи в произвольном потенциале

Базовая организация:  
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН  
117334, Москва, Россия

Исполнитель:  
студент 354 группы  
А. О. Короткевич

Научный руководитель:  
академик РАН В. Е. Захаров

Рецензент:  
к. ф.-м. н. А. И. Дьяченко

Москва, 1999 г.

# Содержание

|   |   |    |
|---|---|----|
| 1 | Введение  | 2  |
| 2 | Канонические переменные для потока идеальной жидкости                   | 4  |
| 3 | Связь между действительной и мнимой частями регулярной в полосе функции | 6  |
| 4 | Комплексный потенциал и кинетическая энергия                            | 9  |
| 5 | Уравнения движения в неявной форме                                      | 11 |
| 6 | Поверхностное натяжение   | 14 |
| 7 | Простой пример  | 16 |
| 8 | Заключение  | 17 |

# 1 Введение

Задача о двумерном потенциальном потоке идеальной жидкости в некотором потенциале для гидродинамики является классической. Есть и традиционный метод решения этих задач — конформные преобразования. Первый важный результат на этом пути был получен Стоксом [1] в середине прошлого века. Им было исследовано поведение гравитационных волн при росте амплитуды. В двадцатые годы этого столетия были выполнены классические работы Некрасова [2] и Леви-Чивита [3]. И позднее исследователи вновь и вновь обращались к методу конформных отображений в задачах со свободной поверхностью [4].

Одним из красивейших применений этого метода является задача о вытекании струи из полуплоскости под давлением. Решая эту задачу методом конформных отображений удается избежать решения дифференциальных уравнений в частных производных, так как после нескольких преобразований задача сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка, которое легко интегрируется одной квадратурой. Более подробно с этой задачей можно ознакомиться в [5].

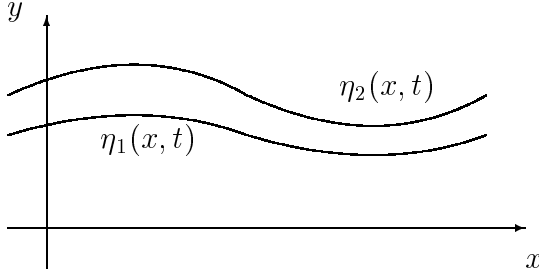
Для исследования нестационарной динамики поверхности в шестидесятые годы и позже получил развитие подход, основанный на лагранжевом описании [6, 7]. Однако попытки применить метод аналитического продолжения по лагранжевым переменным не привели к успеху. В последние годы были совершены попытки [8, 9] применить конформное отображение к нестационарной задаче прямо в эйлеровом описании. Для периодической задачи с глубокой водой использовалось отображение области во внутренность единичного круга. Однако уравнения оказались достаточно сложными, что затруднило аналитический и численный анализ.

В настоящее время наиболее удобным является подход основанный на использовании канонического формализма, известного с 1968 г. (см. [10]). Для двумерной геометрии применение конформных отображений в сочетании с каноническим формализмом представляется наиболее естественным. Данный подход был с успехом применен для случая глубокой воды в присутствии гравитационного поля и поверхностного натяжения [11, 12]. Позднее, теми же авторами была подробно исследована задача о динамике свободной поверхности в гравитационном поле при наличии жесткого дна [13]. В обоих случаях уравнения были получены в двух видах - неявном и явном. В первом случае уравнения имеют достаточно простой симметричный вид и содержат лишь квадратичную нелинейность. Во втором случае они выглядят сложнее, зато более удобны для численного интегрирования.

В данной работе рассмотрена задача о течении струи идеальной несжимаемой жидкости в произвольном потенциале. Как и в работах [11, 12, 13] применен метод конформных отображений вместе с каноническим формализмом. Найден оператор, связывающий действительную и мнимую части регулярной в полосе функции на границах этой полосы. С использованием этого оператора получены уравнения на динамику формы поверхностей, в том числе с учетом поверхностного натяжения. В заключительной части рассмотрен простой иллюстративный пример применения полученных уравнений.

## 2 Канонические переменные для потока идеальной жидкости

Рассмотрим идеальную жидкость, занимающую полосу между двумя поверхностями  $\eta_1(x, y)$  и  $\eta_2(x, y)$ , как изображено на рисунке



Пусть поток является потенциальным ( $\mathbf{v} = \nabla\Phi$ ) и жидкость несжимаема ( $\text{div } \mathbf{v} = 0$ ). Тогда потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi(x, y, t) = 0. \quad (1)$$

Имеем следующие граничные условия

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\eta_1}{\partial x} \Big|_{y=\eta_1} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \Big|_{y=\eta_1}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial\eta_2}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} \frac{\partial\eta_2}{\partial x} \Big|_{y=\eta_2} = \frac{\partial\Phi}{\partial y} \Big|_{y=\eta_2}, \quad (3)$$

$$\left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 \right) \Big|_{y=\eta_1} + V(x, \eta_1) = 0, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)^2 \right) \Big|_{y=\eta_2} + V(x, \eta_2) = 0. \quad (5)$$

Введем новые переменные

$$\Psi_1(x, t) = \Phi(x, \eta_1(x, t), t), \quad (6)$$

$$\Psi_2(x, t) = \Phi(x, \eta_2(x, t), t). \quad (7)$$

Как было показано в [10], в случае одной поверхности с жидкостью в нижней полуплоскости система является гамильтоновой, причем каноническими переменными являются  $\Psi$  и  $\eta$ . При этом канонические уравнения дают граничные условия приведенные выше.

Рассмотрим случай "перевернутой жидкости". Т. е. пусть мы имеем одну поверхность и сверху нее полупространство заполненное жидкостью. Таким образом, можно записать

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\eta}^{+\infty} (\nabla\Phi)^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{\eta}^{+\infty} V(x, y) dy.$$

Как из этого гамильтониана получить гамильтониан в случае когда жидкость снизу от поверхности? Заменяем  $y \rightarrow -y$ , в результате получаем

$$H = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{-\eta} (\nabla\Phi)^2 dy + \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{-\eta} V(x, -y) dy.$$

Обозначим  $\zeta = -\eta$ , тогда получаем нужный случай. А канонически сопряженные переменные для него известны – это  $\zeta$  и  $\Psi$ . Следовательно, в случае нижней поверхности каноническими переменными являются  $-\eta$  и  $\Psi$ .

Таким образом, в нашем случае, каноническими переменными являются  $\eta_2, \Psi_2$  и  $-\eta_1, \Psi_1$ . А уравнения Гамильтона

$$\frac{\partial(-\eta_1)}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi_1}, \quad \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta(-\eta_1)}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial \eta_2}{\partial t} = \frac{\delta H}{\delta \Psi_2}, \quad \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} = -\frac{\delta H}{\delta \eta_2} \quad (9)$$

эквивалентны граничным условиям (2), (3), (4), (5).

Уравнения (8) и (9) реализуют экстремум действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt, \quad (10)$$

с лагранжианом

$$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \Psi_1 \frac{\partial(-\eta_1)}{\partial t} + \Psi_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \right) dx - H. \quad (11)$$

### 3 Связь между действительной и мнимой частями регулярной в полосе функции

Отобразим конформно в комплексной плоскости  $z = x + iy$  область, занятую водой

$$-\infty < x < +\infty; \eta_1 \leq y \leq \eta_2,$$

в полосу

$$-\infty < u < +\infty; -h \leq v \leq 0$$

в комплексной плоскости  $w = u + iv$ . Найдем оператор, который связывает  $Re(z)$  с  $Im(z)$ .

Имеем следующие граничные условия

$$y|_{v=0} = y_2(u); x|_{v=0} = x_2(u); y|_{v=-h} = y_1(u); x|_{v=-h} = x_1(u). \quad (12)$$

Функция  $y = y(u, v)$  должна быть гармонической

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = 0. \quad (13)$$

Далее считаем, что  $x(u, v) = \tilde{x}(u, v) + a(u, v)$  и  $y(u, v) = \tilde{y}(u, v) + b(u, v)$ , где  $a(u, v)$  и  $b(u, v)$  удовлетворяют уравнению Лапласа, при этом  $\tilde{x} \rightarrow 0$  и  $\tilde{y} \rightarrow 0$  при  $|u| \rightarrow \infty$ . Таким образом мы избавляемся от полюсов. Например, если мы рассматриваем полосу вдоль оси  $x$  в физических переменных и функция  $y$  ограничена на всей оси, то с точностью до констант функции будут иметь следующий вид  $y(u, v) = \tilde{y}(u, v)$  и  $x(u, v) = \tilde{x}(u, v) + u$ . В данном случае мы выделили полюс на бесконечности. Далее знак " $\sim$ " везде опускаем.

Уравнение (13) может быть решено с помощью метода Фурье. Выполняя преобразование Фурье по  $u$  получаем

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} - k^2 y = 0.$$

Решение этого уравнения имеет следующий вид

$$y = A \cosh kv + B \sinh kv.$$

Принимая во внимание (12), получаем

$$y = y_2 \frac{\sinh[k(h+v)]}{\sinh(kh)} - y_1 \frac{\sinh(kv)}{\sinh(kh)}. \quad (14)$$

Из соотношений Коши-Римана

$$\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial v},$$

$$-ikx = k \left( y_2 \frac{\cosh[k(h+v)]}{\sinh(kh)} - y_1 \frac{\cosh(kv)}{\sinh(kh)} \right).$$

И окончательно имеем

$$x = i \left( y_2 \frac{\cosh[k(v+h)]}{\sinh(kh)} - y_1 \frac{\cosh(kv)}{\sinh(kh)} \right). \quad (15)$$

Принимая во внимание (12), получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} x|_{v=-h} = i \left( y_2 \frac{1}{\sinh(kh)} - y_1 \coth(kh) \right) = x_1, \\ x|_{v=0} = i \left( y_2 \coth(kh) - y_1 \frac{1}{\sinh(kh)} \right) = x_2. \end{cases} \quad (16)$$

Таким образом мы имеем обратный оператор в  $k$ -представлении

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -\coth(kh) & \frac{1}{\sinh(kh)} \\ -\frac{1}{\sinh(kh)} & \coth(kh) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

Обратим матрицу

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} \coth(kh) & -\frac{1}{\sinh(kh)} \\ \frac{1}{\sinh(kh)} & -\coth(kh) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Теперь мы получили искомый оператор в  $k$ -представлении, получим его в  $u$ -представлении. Для этого выполним обратное преобразование Фурье. Окончательно получаем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2h} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} \coth[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] & -\tanh[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] \\ \tanh[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] & -\coth[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(u') \\ x_2(u') \end{pmatrix} du' \quad (19)$$

Обратный оператор имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2h} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} -\coth[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] & \tanh[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] \\ -\tanh[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] & \coth[\frac{\pi}{2h}(u'-u)] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(u') \\ y_2(u') \end{pmatrix} du'. \quad (20)$$



Введем оператор  $\hat{R}$

$$(\hat{R}\vec{f})[u] = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{K} \vec{f}(u') du' \quad (21)$$

где

$$\hat{K} = \frac{1}{2h} \begin{pmatrix} -\coth[\frac{\pi}{2h}(u' - u)] & \tanh[\frac{\pi}{2h}(u' - u)] \\ -\tanh[\frac{\pi}{2h}(u' - u)] & \coth[\frac{\pi}{2h}(u' - u)] \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Тогда имеем

$$\vec{y} = \hat{R}\vec{x}, \quad (23)$$

где  $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ . В пределе  $h \rightarrow +\infty$  это преобразование переходит в преобразование Гильберта для верхней поверхности. Этот результат прекрасно согласуется с [11].

Для удобства записи введем

$$\begin{aligned} (\hat{R}_1 f)[u] &= \frac{1}{2h} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(u') \coth[\frac{\pi}{2h}(u' - u)] du', \\ (\hat{R}_2 f)[u] &= \frac{1}{2h} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(u') \tanh[\frac{\pi}{2h}(u' - u)] du'. \end{aligned} \quad (24)$$

Тогда наш оператор запишется в виде

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} -\hat{R}_1 & \hat{R}_2 \\ -\hat{R}_2 & \hat{R}_1 \end{pmatrix}. \quad (25)$$

## 4 Комплексный потенциал и кинетическая энергия

В случае, когда  $\Psi_1 \rightarrow 0$  и  $\Psi_2 \rightarrow 0$  при  $|u| \rightarrow +\infty$ , можно сконструировать вектор-функцию с комплексными компонентами

$$\vec{\theta} = \vec{\phi} + i\hat{R}\vec{\phi},$$

где  $\vec{\phi} = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$ . Эта функция определена на границах и мы можем продолжить ее аналитически в полосу  $-h \leq v \leq 0$ . Потенциал  $\Phi$  после конформного отображения остается гармоническим

$$\Delta\Phi(u, v) = 0,$$

с граничными условиями

$$\Phi|_{v=-h} = \Psi_1(u, t), \quad \Phi|_{v=0} = \Psi_2(u, t).$$

На действительной оси (Коши-Риман)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big|_{v=-h} \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big|_{v=0} \end{pmatrix} = -\frac{\partial}{\partial u} \hat{R}\vec{\phi}.$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big|_{v=-h} &= -\frac{\partial}{\partial u} (-\hat{R}_1\Psi_1 + \hat{R}_2\Psi_2) = -(-\hat{R}_1\Psi_{1u} + \hat{R}_2\Psi_{2u}), \\ \frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big|_{v=0} &= -\frac{\partial}{\partial u} (-\hat{R}_2\Psi_1 + \hat{R}_1\Psi_2) = -(-\hat{R}_2\Psi_{1u} + \hat{R}_1\Psi_{2u}). \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь мы можем записать кинетическую энергию в конформных переменных

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \Phi \frac{\partial\Phi}{\partial v} \Big|_{-h}^0 \right) du = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \Psi_2 [-\hat{R}_2\Psi_{1u} + \hat{R}_1\Psi_{2u}] - \Psi_1 [-\hat{R}_1\Psi_{1u} + \hat{R}_2\Psi_{2u}] \right) du. \end{aligned} \quad (27)$$

Необходимо использовать некоторые соотношения

$$\begin{aligned} \eta_{1t} dx &= (y_{1t}x_{1u} - x_{1t}y_{1u}) du, \\ \eta_{2t} dx &= (y_{2t}x_{2u} - x_{2t}y_{2u}) du. \end{aligned} \quad (28)$$

Наконец, получаем лагранжиан

$$\begin{aligned}
L = & \int_{-\infty}^{+\infty} (-\Psi_1 [y_{1t}x_{1u} - x_{1t}y_{1u}] + \Psi_2 [y_{2t}x_{2u} - x_{2t}y_{2u}]) du + \\
& \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi_2 [-\hat{R}_2\Psi_{1u} + \hat{R}_1\Psi_{2u}] - \Psi_1 [-\hat{R}_1\Psi_{1u} + \hat{R}_2\Psi_{2u}]) du - \\
& - \int_S V(x, y) dx dy + \int_{-\infty}^{+\infty} f_1 (y_1 + \hat{R}_1x_1 - \hat{R}_2x_2) du - \\
& - \int_{-\infty}^{+\infty} f_2 (y_2 + \hat{R}_2x_1 - \hat{R}_1x_2) du,
\end{aligned} \tag{29}$$

где  $f_1$  и  $f_2$  суть множители Лагранжа, определяемые из (23), а  $S$  – наша область.

## 5 Уравнения движения в неявной форме

Для того чтобы найти уравнения движения, надо проварьировать действие  $S = \int L dt$ . Для начала – по  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$ . Получаем

$$\begin{aligned} (y_{1t}x_{1u} - x_{1t}y_{1u}) + \left(-\hat{R}_1\Psi_{1u} + \hat{R}_2\Psi_{2u}\right) &= 0, \\ (y_{2t}x_{2u} - x_{2t}y_{2u}) + \left(-\hat{R}_2\Psi_{1u} + \hat{R}_1\Psi_{2u}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для вариации по  $x_1, y_1$  и  $x_2, y_2$  мы должны преобразовать потенциальную энергию  $U$  в удобную форму. Сделаем это последовательно

$$U = \int_S V(x, y) dx dy = \int_{S'} V(u, v) J du dv,$$

где

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ -\frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 = \left|\frac{\partial z}{\partial u}\right|^2.$$

Введем функцию

$$\mathcal{F}(u, v) = \int V(u, v) J dv,$$

тогда потенциальная энергия запишется в виде

$$U = \int_{-\infty}^{+\infty} (\mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1) du,$$

где  $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}(u, -h)$  и  $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}(u, 0)$ . Далее, проварьировем, например, по  $x_1$

$$\delta_{x_1} U = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{F}_1}{\partial x_1} \delta x_1 du$$

Производя простые вычисления, получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial x_i} &= \frac{\mathcal{F}_{iu}x_{iu} - \mathcal{F}_{iv}y_{iu}}{J} = \frac{\mathcal{F}_{iu}x_{iu}}{J} - V(x_i(u), y_i(u))y_{iu}, \\ \frac{\partial \mathcal{F}_i}{\partial y_i} &= \frac{\mathcal{F}_{iv}x_{iu} + \mathcal{F}_{iu}y_{iu}}{J} = V(x_i(u), y_i(u))x_{iu} + \frac{\mathcal{F}_{iu}y_{iu}}{J}. \end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}_{iu}x_{iu}}{J} &= \operatorname{Re} \left( \frac{\mathcal{F}_{iu}z_{iu}}{|z_{iu}|^2} \right), \\ \frac{\mathcal{F}_{iu}y_{iu}}{J} &= \operatorname{Im} \left( \frac{\mathcal{F}_{iu}z_{iu}}{|z_{iu}|^2} \right). \end{aligned}$$

Теперь мы можем вычислить вариационные производные действия

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x_1} = 0 \Rightarrow \\ y_{1_u} \Psi_{1_t} - y_{1_t} \Psi_{1_u} + V(x_1(u), y_1(u)) y_{1u} - \operatorname{Re} \left( \frac{\mathcal{F}_{1u} z_{1u}}{|z_{1u}|^2} \right) = -\hat{R}_1 f_1 + \hat{R}_2 f_2, \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta y_1} = 0 \Rightarrow \\ -x_{1_u} \Psi_{1_t} + x_{1_t} \Psi_{1_u} - V(x_1(u), y_1(u)) x_{1u} - \operatorname{Im} \left( \frac{\mathcal{F}_{1u} z_{1u}}{|z_{1u}|^2} \right) = f_1, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta x_2} = 0 \Rightarrow \\ y_{2_u} \Psi_{2_t} - y_{2_t} \Psi_{2_u} + V(x_2(u), y_2(u)) y_{2u} - \operatorname{Re} \left( \frac{\mathcal{F}_{2u} z_{2u}}{|z_{2u}|^2} \right) = -\hat{R}_2 f_1 + \hat{R}_1 f_2, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\delta S}{\delta y_2} = 0 \Rightarrow \\ -x_{2_u} \Psi_{2_t} + x_{2_t} \Psi_{2_u} - V(x_2(u), y_2(u)) x_{2u} - \operatorname{Im} \left( \frac{\mathcal{F}_{2u} z_{2u}}{|z_{2u}|^2} \right) = f_2, \end{aligned} \quad (34)$$

Принимая во внимание связь между действительной и мнимой частями, члены с  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  можем сократить, тогда имеем

$$y_{1_u} \Psi_{1_t} - y_{1_t} \Psi_{1_u} + V(x_1(u), y_1(u)) y_{1u} = -\hat{R}_1 f_1 + \hat{R}_2 f_2, \quad (35)$$

$$y_{2_u} \Psi_{2_t} - y_{2_t} \Psi_{2_u} + V(x_2(u), y_2(u)) y_{2u} = -\hat{R}_2 f_1 + \hat{R}_1 f_2, \quad (36)$$

$$-x_{1_u} \Psi_{1_t} + x_{1_t} \Psi_{1_u} - V(x_1(u), y_1(u)) x_{1u} = f_1, \quad (37)$$

$$-x_{2_u} \Psi_{2_t} + x_{2_t} \Psi_{2_u} - V(x_2(u), y_2(u)) x_{2u} = f_2. \quad (38)$$

Множители Лагранжа  $f_1$  и  $f_2$  могут быть легко исключены простой подстановкой. Итак, мы получили уравнения движения в неявной форме.

Для сравнения с более ранними работами полезно записать эти уравнения в матричной форме

$$\begin{pmatrix} y_{1t}x_{1u} - x_{1t}y_{1u} \\ y_{2t}x_{2u} - x_{2t}y_{2u} \end{pmatrix} = -\hat{R} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (39)$$

$$\begin{pmatrix} y_{1u}\Psi_{1t} - y_{1t}\Psi_{1u} + V(x_1, y_1)y_{1u} \\ y_{2u}\Psi_{2t} - y_{2t}\Psi_{2u} + V(x_2, y_2)y_{2u} \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (40)$$

$$\begin{pmatrix} -x_{1u}\Psi_{1t} + x_{1t}\Psi_{1u} - V(x_1, y_1)x_{1u} \\ -x_{2u}\Psi_{2t} + x_{2t}\Psi_{2u} - V(x_2, y_2)x_{2u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (41)$$

## 6 Поверхностное натяжение

Мы можем включить в рассмотрение поверхностное натяжение. Для этого надо добавить члены в Гамильтониан

$$H_\sigma = \sigma \oint_S dl = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sqrt{1 + \eta_{2x}^2} - 1 \right) dx - \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \sqrt{1 + \eta_{1x}^2} - 1 \right) dx.$$

В результате конформного отображения этот член подвергается некоторой трансформации

$$H_\sigma = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (|z_{2u}| - x_{2u}) du - \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (|z_{1u}| - x_{1u}) du.$$

Окончательно Лагранжиан принимает вид

$$L_\Sigma = L - \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (|z_{2u}| - x_{2u}) du + \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} (|z_{1u}| - x_{1u}) du. \quad (42)$$

Это окажет влияние на уравнения движения

$$\begin{aligned} y_{1u} \Psi_{1t} - y_{1t} \Psi_{1u} + V(x_1(u), y_1(u)) y_{1u} - \\ - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{1u}}{|z_{1u}|} \right) = -\hat{R}_1 f_1 + \hat{R}_2 f_2, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} -x_{1u} \Psi_{1t} + x_{1t} \Psi_{1u} - V(x_1(u), y_1(u)) x_{1u} - \\ - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{1u}}{|z_{1u}|} \right) = f_1, \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} y_{2u} \Psi_{2t} - y_{2t} \Psi_{2u} + V(x_2(u), y_2(u)) y_{2u} - \\ - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{2u}}{|z_{2u}|} \right) = -\hat{R}_2 f_1 + \hat{R}_1 f_2, \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} -x_{2u} \Psi_{2t} + x_{2t} \Psi_{2u} - V(x_2(u), y_2(u)) x_{2u} - \\ - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{2u}}{|z_{2u}|} \right) = f_2. \end{aligned} \quad (46)$$

Эти уравнения и (30) вместе образуют замкнутую систему уравнений.

В матричной форме они выглядят так

$$\begin{pmatrix} y_{1t} x_{1u} - x_{1t} y_{1u} \\ y_{2t} x_{2u} - x_{2t} y_{2u} \end{pmatrix} = -\hat{R} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad (47)$$

$$\begin{pmatrix} y_{1_u} \Psi_{1_t} - y_{1_t} \Psi_{1_u} + V(x_1, y_1) y_{1_u} - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{1_u}}{|z_{1_u}|} \right) \\ y_{2_u} \Psi_{2_t} - y_{2_t} \Psi_{2_u} + V(x_2, y_2) y_{2_u} - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{2_u}}{|z_{2_u}|} \right) \end{pmatrix} = \hat{R} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad (48)$$

$$\begin{pmatrix} -x_{1_u} \Psi_{1_t} + x_{1_t} \Psi_{1_u} - V(x_1, y_1) x_{1_u} - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{1_u}}{|z_{1_u}|} \right) \\ -x_{2_u} \Psi_{2_t} + x_{2_t} \Psi_{2_u} - V(x_2, y_2) x_{2_u} - \sigma \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{x_{2_u}}{|z_{2_u}|} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}. \quad (49)$$



## 7 Простой пример

Рассмотрим простой пример. Пусть мы имеем каплю в форме эллипса при отсутствии внешних сил ( $V(x, y) = 0$ ). Скоростной потенциал имеет вид

$$\Phi = -\frac{\alpha(t)}{2}(x^2 - y^2) + C(t). \quad (50)$$

Используя симметрию, получаем

$$x = x_1 = x_2, y = y_2 = -y_1, \Psi = \Psi_1 = \Psi_2, \theta = \theta_2 = -\theta_1, \quad (51)$$

где  $\theta_1, \theta_2$  есть функции тока. После подстановки этих соотношений в уравнения движения (35),(36),(37),(38), получаем

$$\begin{cases} y_t x_u - x_t y_u = -(\hat{R}_1 - \hat{R}_2)\Psi_u, \\ y_u \Psi_t - y_t \Psi_u = (-\hat{R}_2 + \hat{R}_1)f, \\ -x_u \Psi_t + x_t \Psi_u = f. \end{cases} \quad (52)$$

Мы можем ввести обозначения  $\hat{H} = (\hat{R}_1 - \hat{R}_2)$ . Очевидно, что данный оператор связывает действительную и мнимую части. И окончательно получаем

$$\begin{cases} y_t x_u - x_t y_u = -\hat{H}\Psi_u, \\ y_u \Psi_t - y_t \Psi_u = -\hat{H}f, \\ -x_u \Psi_t + x_t \Psi_u = f. \end{cases} \quad (53)$$

Эти уравнения полностью совпадают с [11].

Попробуем исключить  $\hat{H}$  из наших уравнений. С этой целью умножим второе и третье уравнения на  $x_u$  и  $y_u$  соответственно и сложим их. После простых алгебраических вычислений получаем следующий результат

$$\frac{1}{2}ImW_u^2 = Im(z_u F), \text{ или } \frac{W_u^2}{2} = z_u F, \quad (54)$$

где  $W = \Psi + i\hat{H}\Psi = \alpha^2 z^2 z_u^2$ ,  $z = x + iy$ ,  $F = f + i\hat{H}f$ . Откуда получаем

$$F = \frac{\alpha^2}{2}z^2 z_u = \frac{\alpha^2}{2}[x^2 x_u - y^2 x_u - 2xy y_u + i(2xx_u y + x^2 y_u - y^2 y_u)]. \quad (55)$$

После простых вычислений получаем

$$\left(\frac{\alpha_t}{2} + \frac{\alpha^2}{2}\right)y^2(y_u^2 + x_u^2) + \left(\frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha_t}{2}\right)x^2(y_u^2 + x_u^2) + C_t(t)(y_u^2 + x_u^2) = 0. \quad (56)$$

Это уравнение эллипса, полуоси которого меняются со временем (множитель  $y_u^2 + x_u^2$  есть не что иное, как Якобиан конформного отображения и следовательно может быть исключен). Если использовать граничные условия, то можно получить функции  $\alpha$  и  $C(t)$ , однако это уже не имеет отношения к излагаемому методу.

## 8 Заключение

В данной работе рассмотрена задача о течении струи идеальной несжимаемой жидкости в произвольном потенциале. Найдены канонические переменные для этой системы. Путем конформного отображения область занятая жидкостью переводится в горизонтальную полосу в комплексной полуплоскости. Таким образом, изменение формы области в физических переменных сводится к изменению граничных условий в конформных переменных, что несомненно удобнее для решения уравнения Лапласа (1).

Далее, в конформных переменных записывается Лагранжиан (29), для чего было необходимо получить оператор (25), связывающий действительную и мнимую части регулярной в полосе функции (конформного отображения) на границах. Этот оператор имеет тот же смысл, что и оператор Гильберта для регулярной в полуплоскости функции.

Из вариационного принципа получены уравнения динамики поверхностей (30),(35),(36),(37), (38). Они имеют довольно простой и симметричный вид. Если записать их в матричном виде (39),(40),(41), то явно видна связь с полученными ранее тем же методом уравнениями для глубокой воды [11], [12] и для задачи с жестким дном [13].

В задаче так же учтено поверхностное натяжение в виде дополнительных членов в лагранжиан (42). Получены уравнения с учетом поверхностного натяжения (43),(44),(45),(46), которые вместе с уравнениями на потенциал (30) образуют замкнутую систему уравнений. Приведен и матричный вид уравнений (47),(48), (49).

В последней части работы рассмотрена простая задача, иллюстрирующая возможности примененного метода и полученных уравнений. Это задача о динамике поверхности капли при условии, что потенциал скоростей имеет квадратичный вид (50). Показано, что при таких условиях капля, первоначально имевшая форму эллипса, так и останется эллипсом (56), но коэффициенты в ее уравнении будут меняться.

## Список литературы

- [1] G.G. Stokes. *Mathematical and Physical Papers*, Vol. 1 pp.225-228. (Cambridge University Press, 1880).
- [2] А.И. Некрасов. *О стационарных волнах*. Изв. Иваново-Вознесенского Инст., N.3, (1921).
- [3] T. Levi-Civita. *Mathematische Annalen*, **93**, 264 (1925).
- [4] J.J. Stoker. *Water Waves*. (Interscience Publ., London, 1957).
- [5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц, Теоретическая физика, т. **VI**, Гидродинамика, с. 48. ("Наука", Москва, 1988).
- [6] G. Birkhoff. In: Proc. Sympos. Appl. Maths. **XII**, Providence, R.I.: AMS (1962).
- [7] G.R. Baker, D.I. Meiron and S.A. Orzag. *J. Fluid Mech.* **123**, 477 (1982).
- [8] S. Tanveer, Proc. R. Soc. Lond. A **435**, 137 (1991).
- [9] S. Tanveer, Proc. R. Soc. Lond. A **441**, 501 (1993).
- [10] V.E. Zakharov, *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* **2** (1968) 190.
- [11] A.I. Dyachenko, E.A. Kuznetsov, M.D. Spector, V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **221** (1996) 73.
- [12] A.I. Dyachenko, E.A. Kuznetsov, M.D. Spector, V.E. Zakharov, *Phys. Lett. A* **221** (1996) 80.
- [13] А.И. Дьяченко, В.Е. Захаров, Е.А. Кузнецов, *Физика плазмы ?*